Бесплатно

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

МАИ

К.Г. КУЛЕШОВ
А.И. ПАВЛЕНКО
М.Ф. РОСИН

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
ПО КУРСУ "ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ II"

МОСКВА – 1986

№ 18

Чесноковой
03-422

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

К.Г. КУЛЕШОВ, А.И. ПАВЛЕНКО, М.Ф. РОСИН

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по курсу
"ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ II"

Утверждено
на заседании редсовета
21 мая 1985 г.

МОСКВА 1986

5I9 (075)
К 90I

УДК: 5I9.8 (075.6)

Кулешов К.Г., Павленко А.И., Росин М.Ф. Лабораторные работы по курсу "Исследование операций П". - М.: МАИ, I986. - 26 с., ил.

В лабораторных работах рассматриваются вопросы выбора оптимальных стратегий в условиях неопределенности.

Руководство предназначено для студентов специальности "Автоматизированные системы управления".

Рецензенты: Г.Н. Маслов, В.Е. Терехов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе "Исследование операций-П", который читается для студентов, обучающихся по специальности "Автоматизированные системы управления", рассматриваются методы построения стратегий принятия решений в неопределенной ситуации.

Цель данного учебного пособия - помочь студентам самостоятельно выполнить лабораторные работы и освоить основные методы принятия решений в различных условиях.

Неопределенность ситуаций принятия решений обусловливается факторами, зависящими от состояния природы и действий противника. Различие между этими типами факторов заключается в предположении, что противник действует целенаправленно, с определенным умыслом, а природа "нейтральна" по отношению к принимаемому решению.

Для раскрытия неопределенностей при принятии решений рассматриваются два принципа: принцип минимакса и принцип максимального среднего результата.

Построению стратегий и моделей, основанных на использовании принципа максимального среднего результата, посвящены лабораторные работы I-3. При этом в работах I и 2 рассматриваются байесовские стратегии и модели применительно к различным конкретным примерам организационного управления. В работе 3 проводится сравнительный анализ различных критериев принятия решений в условиях неопределенности.

Лабораторная работа 4 посвящена построению стратегий принятия решений и изучению соответствующих моделей, основанных на использовании принципа минимакса.

Работа I. ВЫБОР БАЙЕСОВСКИХ И МИНИМАКСНЫХ СТРАТЕГИЙ В ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ

Цель работы - овладение основными методами отыскания оптимальных (байесовских и минимаксных) стратегий выбора действия (решения) в неопределенной ситуации.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель принятия решений включает в себя:

- множество возможных состояний природы $S\{s_i\}$, порождающее неопределенность ситуации, так как в момент принятия решения истинное состояние природы не известно. Эта ситуация может быть задана априорным распределением на множестве S (статистически определенная), либо может быть полностью неопределенной в статистическом смысле;

- множество возможных действий $D\{d_j\}$, причем правильный выбор каждого из действий d_j зависит от истинного состояния природы;

- функцию потерь $U(d,S)$, посредством которой можно оценить результаты применения любого из возможных действий $d_j \in D$, если истинное состояние природы s_i. Она может быть задана либо в виде некоторой аналитической зависимости, либо в виде матрицы $\| u_{ji} \| = \| u(d_j, s_i) \|$;

- эксперимент, проводимый для получения информации о состоянии природы. Однако возможные его результаты $x_н \in X$ зависят не только от состояния природы, но и от точности самого эксперимента. В связи с этим должна быть известна характеристика эксперимента - распределение $F(x/s_i)$ на множестве X для всех $s_i \in S$;

- множество стратегий $A\{a_\nu\}$, каждая из которых есть совокупность правил, предписывающих определенное действие $d_j \in D$ при результате эксперимента $x_i \in X$.

Задача заключается в том, чтобы из всего множества возможных стратегий выбрать оптимальную в смысле какого-либо критерия.

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Придумать вариант задачи для $S\{s_1, s_2\}, D\{d_1, d_2, d_3\}$, $X\{x_1, x_2, x_3\}$. Задаться функцией потерь в виде матрицы $U(d_j, s_i)$ и распределением вероятностей $p(X = x_i / s_i)$.

2. Перечислить все возможные стратегии $a_\nu \in A$.

3. Построить графическое отображение множества стратегий $A\{a, \nu\}$ на множестве условных средних потерь $r(a_\nu, s_i)$ и обозначить границы этого отображающего множества. Перечислить все допустимые стратегии.

4. Для пары допустимых стратегий a_i и a_j составить смешанную стратегию из условия их применения с вероятностями $(1-\rho)$ и ρ соответственно (значение ρ получить у преподавателя).

5. Вычислить средние потери для всех допустимых стратегий и определить байесовскую стратегию аналитически и с помощью опорных прямых. Априорную вероятность $p_2 = p(S = s_2)$ получить у преподавателя.

6. Найти минимаксную стратегию (анализируя результаты расчетов и графически).

7. Оформить отчет, отразив в нем все расчеты и результаты.

8. Ответить на контрольные вопросы.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Решение поставленной задачи проиллюстрируем на следующем примере. Командир авиаотряда в условиях, когда природа (погода) имеет два возможных состояния s_1 - "ясно" и s_2 - "сплошная облачность", может предпринять одно из трех возможных действий: d_1 - дать команду о вылете самолетов; d_2 - отложить вылет на некоторое время; d_3 - отменить полеты.

Каждое из этих действий приводит к определенным результатам, заданным матрицей потерь $u(d_j, s_i)$ (табл. 1.1).

Результатами эксперимента $x_i \in X$ являются показания барометра: x_1 - "ясно", x_2 - "переменно", x_3 - "дождь". Имеется распределение вероятностей возможных результатов экспериментов для всех состояний природы (табл. 1.1).

Т а б л и ц а I.I

Матрица потерь $u(d_j, s_i)$				Характеристика эксперимента $p(X = x_i/s_i)$		
Состояния природы	Возможные действия			Результаты эксперимента		
	d_1	d_2	d_3	x_1	x_2	x_3
s_1	0	I	3	0,6	0,25	0,I5
s_2	5	3	2	0,2	0,3	0,5

2. Если каждому из трех возможных результатов эксперимента x_i поставить в соответствие одно из трех возможных действий d_j, то получим множество $A\{a_y\}$, состоящее из 27 возможных стратегий (табл. I.2).

Т а б л и ц а I.2

Результаты эксперимента	Стратегии $a_y(X)$							
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6 ...	a_9 ...	a_{27}
x_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_3
x_2	d_1	d_1	d_1	d_2	d_2	d_2	d_3	d_3
x_3	d_1	d_2	d_3	d_1	d_2	d_3	d_3	d_3

Каждая стратегия a_y определяет способ действия D в зависимости от случайного исхода эксперимента, т.е. $D = a_y(X)$. Поэтому эффективность каждой стратегии может быть оценена путем вероятностного усреднения потерь по всем реализациям D при фиксированном состоянии природы. Эта оценка называется условными средними потерями и вычисляется по формуле

$$r(a_y, s_i) = M\{u(D, a_y, s_i)\} = \sum_{j=1}^{3} U(d_j, s_i)\, p(D = d_j/a_y, s_i), \qquad \text{(I.I)}$$

где $p(D = d_j/a_y, s_i)$ – вероятность того, что в данной стратегии a_y при состоянии природы s_i будет предпринято действие d_j. Она вычисляется по формуле полной вероятности:

$$p(D = d_j/a_y, s_i) = \sum_{i=1}^{3} p(X = x_i/s_i)\, p(d_j/x_i, a_y), \qquad \text{(I.2)}$$

где вероятности гипотез $p(X = x_i/s_i)$ – вероятности появления одного из возможных результатов эксперимента, а $p(d_j/x_i, a_y)$ – вероятности того, что в данной стратегии a_y результату эксперимента x_i поставлено в соответствие действие d_j. Если последнее имеет место, то $p(d_j/x_i, a_y) = 1$, если нет, то эта вероятность равна нулю.

Проиллюстрируем сказанное на примере вычисления условных потерь для стратегии a_5, в которой предпринимается действие d_1, если результатом эксперимента является x_1, и действие d_2 – если x_2 или x_3, т.е. $a_5 = \{d_1, d_2, d_3\}$.

Сначала вычислим по (I.2) вероятности действий $p(d_j)$, взяв значения $p(X = x_i/x_5)$ из табл. I.I:

$$p(D = d_1/a_5, s_1) = 0{,}6\ \mathrm{I} + 0{,}25\ 0 + 0{,}\mathrm{I}5\ 0 = 0{,}6;$$
$$p(D = d_2/a_5, s_1) = 0{,}6\ 0 + 0{,}25\ \mathrm{I} + 0{,}\mathrm{I}5\ \mathrm{I} = 0{,}4;$$
$$p(D = d_3/a_5, s_1) = 0{,}6\ 0 + 0{,}25\ 0 + 0{,}\mathrm{I}5\ 0 = 0$$

(последнее очевидно и без расчета, так как d_3 в стратегии a_5 не используется никогда).

Теперь по формуле (I.I), взяв значения $U(d_j, S_i)$ из той же табл. I.I, находим

$$r(a_5, s_1) = 0\ 0{,}6 + \mathrm{I}\ 0{,}4 + 3\ 0 = 0{,}4.$$

Для второго состояния природы $S = s_2$ получим $r(a_5, s_2) = 3{,}4$.

3. Проведя аналогичные расчеты для остальных возможных стратегий, можем построить графическое отображение множества возможных стратегий на множестве условных средних потерь (рис. I.I). Каждая стратегия a_y отображена на этом множестве точкой y = I, 2, ..., 27 с координатами $r(a_y, s_1)$ и $r(a_y, s_2)$. Назовем это множество точек множеством стратегий $a_y \in A$.

4. В общем случае, если две чистые стратегии $a_i \in A$ и $a_j \in A$ используются с вероятностями, равными соответственно (I – p) и p, то рандомизированную стратегию обозначают как $\hat{a}\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ (1-p) & p \end{pmatrix}$, а условные средние потери для нее вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} r(\hat{a}, s_1) &= M\{r(a, s_1)\} = (1-p)\, r(a_i, s_1) + p\, r(a_j, s_1), \\ r(\hat{a}, s_2) &= M\{r(a, s_2)\} = (1-p)\, r(a_i, s_2) + p\, r(a_j, s_2), \end{aligned} \qquad \text{(I.3)}$$

Точка $\hat{a}$ лежит на отрезке $a_i a_j$, деля его в отношении (I – p) : p, а значит, и любая точка этого отрезка представляет некоторую случайную смесь стратегий a_i, a_j.

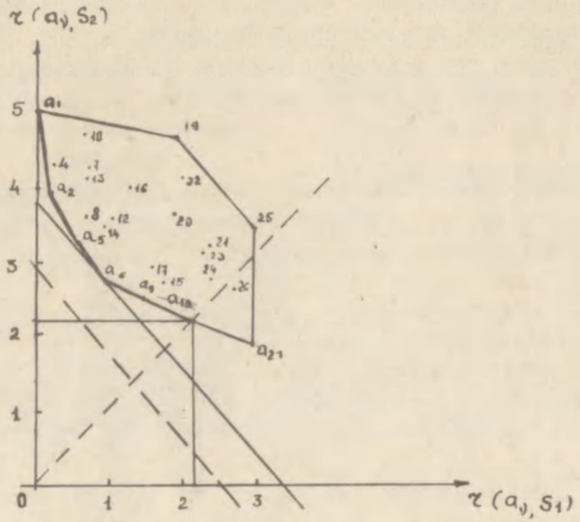

Рис. I.I

5. Рассмотрим статистически определенную ситуацию с известными априорными вероятностями возможных состояний природы $\rho(S=s_2)=\rho$ и $\rho(S=s_1)=1-\rho$.

Условные средние потери $r(a_y, s_i)$ являются функциями случайной величины S. Вероятностным усреднением $r(a_y, s_i)$ по всем состояниям природы можно получить средние потери $R(a_y)$, свободные от природной случайности S и являющиеся более общей оценкой эффективности стратегии

$$R(a_y) = M\{r(a_y, s_i)\} = \sum_{i=1}^{n} r(a_y, s_i)\, \rho(S = s_2). \qquad (I.4)$$

Оптимальной при заданных априорных вероятностях $\rho(S = s_i)$ стратегией a_y^* называют такую, для которой средние потери

$$R(a_y^*) = \min_{a_y \in A} \left[(1-\rho)\, r(a_y, s_1) \right] + \rho r(a_y, s_2)] ; \qquad (I.5)$$

$R(a_y^*)$ называют байесовскими потерями или байесовским риском, а стратегию a_y^* – байесовской. Байесовскую стратегию можно найти графически, используя графическое отображение множества стратегий (рис. I.I) и так называемые опорные прямые. Прямая называется опорной прямой множества A в граничной точке ϑ этого множества, если она проходит через ϑ и при этом множество A целиком лежит по одну сторону от этой прямой.

Известно, что прямая $ax + by = c$ при изменении c перемещается параллельно самой себе. Можно доказать, что для любой допустимой стратегии существует пара однозначных коэффициентов (весов) a и b и прямая $ar_1 + br_2 = c$, проходящая через отображающую точку ϑ этой стратегии, является опорной прямой множества A в этой точке. При этом множество стратегий лежит правее этой прямой, т.е. $ar_1 + br_2 \geq c$ для всех точек множества A и $ar_1 + br_2 = c$ в точке ϑ , а выражение (I.5) удовлетворяет рассмотренным свойствам. Можно доказать, что любая стратегия является байесовской стратегией a_y^* , соответствующей некоторым априорным вероятностям возможных состояний природы $\rho(S = s_1) = 1 - \rho$ и $\rho(S = s_2) = \rho$, при которых выполняется условие (I.5).

Обратное утверждение о том, что если $(1 - \rho)$ и ρ – априорные вероятности состояний природы s_1 и s_2 , то соответствующие байесовские стратегии являются допустимыми, выполняется не всегда.

Итак, чтобы графически найти оптимальные байесовские стратегии, нужно построить прямую $(1 - \rho)\, r_1 + \rho r_2 = c$, лежащую ниже множества A (рис. I.I), и, увеличивая c , сдвинуть эту прямую вверх параллельно самой себе. Точки, в которых эта прямая коснется множества A , представляют байесовские стратегии, соответствующие априорным вероятностям $(1 - \rho)$ и ρ. Эта стратегия может оказаться как смешанной, так и чистой.

Если $\rho = 0$, то байесовская стратегия минимизирует $r(a_y, s_2)$, опорная прямая будет вертикалью, и если она соприкасается с множеством A в нескольких точках, то допустимой будет стратегия, у которой $r(a_y, s_2)$ минимальна.

Если $\rho \to 1$, то опорная прямая обращается в горизонталь и байесовская стратегия минимизирует $r(a_y, s_2)$ независимо от $r(a_y, s_1)$.

6. В случае статистически неопределенной ситуации оптимальной будет минимаксная стратегия a_y^*, для которой

$$r(a_y^*) = \min_{a_y \in A} \max_{s_i} r(a_y, s_i). \qquad (I.6)$$

Минимаксный подход к выбору оптимальной стратегии гарантирует минимальные условные средние потери при наихудшем состоянии природы.

Минимаксную стратегию можно найти графически. Для этого на рис. I.I строится вспомогательное множество точек, имеющее вид клина со сторонами, параллельными координатным осям с вершиной в точке (c, c). Затем, увеличивая c , сдвигают клин вправо и вверх.

Точка, в которой этот клин в первый раз коснется множества A, соответствует минимаксной стратегии. Если клин касается множества A своей вершиной, то условные средние потери при минимаксной стратегии одинаковы для обоих состояний природы. Если касание происходит по линии, то оптимальной будет допустимая стратегия.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Что включает в себя модель принятия решения?

2. Какими свойствами обладает множество стратегий?

3. Какие оценки эффективности стратегий Вам известны?

4. Что такое байесовская стратегия и какие способы ее определения Вам известны?

5. Что такое минимаксная стратегия и какие способы ее определения Вам известны?

Работа 2. БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Цель работы - получение навыков практического построения байесовских стратегий принятия решений на примере разработки системы.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении целого ряда практических задач очень часто встает вопрос о количественной оценке действий. Наличие количественной оценки позволяет из множества возможных действий выбрать одно - оптимальное. Рассмотрим такую ситуацию: предприятию предлагается заключить договор на изготовление и эксплуатацию системы, состоящей из N однотипных устройств. Система должна работать в течение T лет. Каждая неисправность в течение этого периода должна устраняться изготовителем, на что он затрачивает C_0 стоимостных единиц. Заказчик устанавливает плату Z стоимостных единиц, которую получит предприятие в случае заключения договора. Затраты предприятия состоят из затрат на изготовление системы (K_0 единиц) и на ее обслуживание, т.е. на устранение неисправностей в течение T лет. В этой ситуации предприятию требуется принять решение: заключать договор (действие d_1) или его отклонить (действие d_2).

Предполагается, что предприятие к моменту заключения договора располагает следующей информацией:

I. Имеются результаты опроса экспертов о предполагаемой частоте отказов λ или же известна априорная плотность вероятности $f(\lambda)$.

2. Известны:

а) плата по договору Z ;

б) стоимость создания системы K_0 ;

в) стоимость единичного ремонта C_0 .

3. Процесс отказов устройства пуассоновский.

4. Может быть выполнено несколько вариантов экспериментов e, т.е. может быть несколько вариантов получения результата $x(\lambda,e)$.

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

I. Построить графики зависимости прибыли предприятия $V(\lambda,d)$ от интенсивности отказов λ и найти $\lambda = \dfrac{K_2}{K_1}$.

2. По результатам экспертного опроса или же по известной $f(\lambda)$ определить априорные вероятности отказов $p(\lambda)$.

3. Каждой бригаде студентов рассмотреть свой вариант эксперимента. Бригада I в качестве $x(\lambda,e)=x(\lambda,n)$ рассматривает время отказов всех n -устройств τ_1 ; бригада 2 - время отказа первого из устройств τ_2 ; бригада 3 - время отказа половины из испытываемых устройств τ_3 ; бригада 4 - количество отказов за время T_1 ; бригада 5 - количество отказов за время T_2 .

Для каждого варианта задана функциональная зависимость стоимости проведения испытаний (тестов) $C_\xi = C_\xi n$, $\xi =$ I, ..., 5. Предполагается, что наблюдение за временем отказа осуществляется в дискретные моменты $t_1, t_2, \dots, t_\infty$. Таким образом, для бригад I, 2, 3 непрерывная величина $x(\lambda,e)$ заменяется дискретной $x_1, x_2, \dots, x_\infty$

4. Выбрать и дать обоснование принятой функции правдоподобия $x(\lambda,e)$.

5. Построить дерево решения для теста размера $n =$ 0,I,2,3.

6. Для одного из значений n_0 и результата x_0 графоаналитически (если задана $f(\lambda)$) найти апостериорную плотность вероятности $f(\lambda/n_0,x_0)$ или же численно определить $p(\lambda/n_0,x_0)$ (если заданы результаты экспертного опроса) и дать рекомендации по выбору альтернативного действия d_1 или d_2 .

7. Используя результаты п. 6, каждой бригаде подготовить данные для составления обобщенной таблицы результатов.

8. Составить обобщенную табл. 2.I и обсудить полученные результаты. Дать рекомендации по выбору варианта экспериментального проекта.

Таблица 2.I

Номер бригады	I	2	3	4	5
Оптимальная средняя прибыль					
Оптимальный размер теста					
Рекомендации по выбору альтернативного действия					

9. Составить отчет на основе полученных данных.
IO. Ответить на контрольные вопросы.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для того чтобы принять решение, заключать договор или нет, необходимо знать количество отказов за время функционирования системы, определяемое интенсивностью отказов. λ.

Среднее количество отказов за договорный период обслуживания равно $N\lambda T$, а средняя стоимость ремонтов $K_1\lambda$, где $K_1 = C_0 NT$. Если договор будет заключен (действие d_1), то прибыль предприятия $V(\lambda, d_1)$, зависящая от величины λ, будет

$$V(\lambda, d_1) = Z - K_0 - K_1\lambda = K_2 - K_1\lambda,$$

где $K_2 = Z - K_0$.

Если договор отклонен (действие d_2), то прибыль $V(\lambda, d_2)$ равна 0 независимо от величины λ.

Графики затрат предприятия $K_0 + K_1\lambda$ и прибыли $V(\lambda, d)$ показаны на рис. 2.I и 2.2.

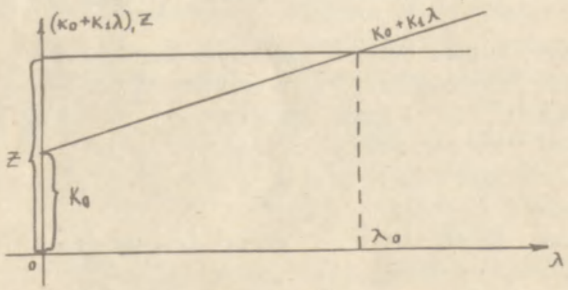

Рис. 2.I

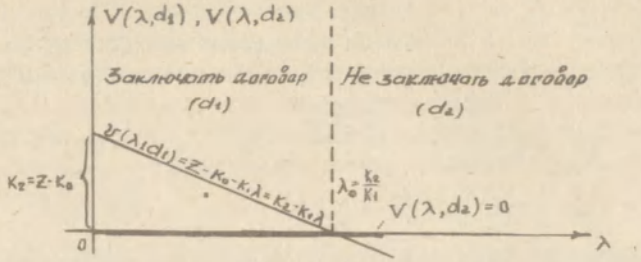

Рис. 2.2

Таким образом, имеет смысл заключить договор, если прибыль будет больше 0, т.е. когда $\lambda < \frac{K_0}{K_1} = \lambda_0$.

Неопределенность состоит в том, что к моменту принятия решения, заключать договор или нет, точное значение λ не известно.

Для уточнения априорной плотности распределения $f(\lambda)$ можно провести эксперимент.

Рассмотрим его порядок.

Сначала выбираем некоторый тест e_i ; $i = I, \dots, n$ и наблюдаем результат x_j, $j = I, \dots, m$ теста. На основании результата теста предпринимаем действие d_l, $l = I, 2$, из множества альтернативных действий и, наконец, наблюдаем некоторое случайное значение λ_k, $k = I, \dots, r$. В данной задаче e_i определяется количеством испытываемых устройств n, временем отказов всех устройств x_j, заключением или незаключением договора d_l, интенсивностью отказов устройств λ_k. Эта последовательность иллюстрируется с помощью дерева решений (рис. 2.3).

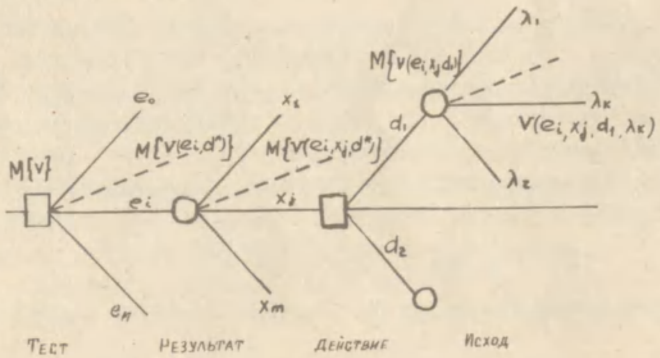

Рис. 2.3

Каждой вершине дерева решений, т.е. каждому значению λ_k при конкретных d_l, x_j и e_i, соответствует прибыль $V(e_i, x_j, d_l, \lambda_k)$. Квадратики на рис. 2.3 соответствуют моментам принятия решений каким-то лицом, кружочки – моментам, когда пути выбираются случайно. Если считать x_j и λ_k дискретными (т.е. реализации x и λ измеряются с некоторой заданной точностью Δx и $\Delta\lambda$), то средняя прибыль (математическое ожидание):

$$M[V] = \sum_e \sum_x \sum_d \sum_\lambda V(e, x, d, \lambda) \cdot p(e, x, d, \lambda), \qquad (2.1)$$

где суммирование производится по всем возможным значениям e, x, d, λ. Индексы i, j, l, k при e, x, d, λ в (2.1) и в дальнейшем опущены.

Равенство (2.1) приведем к виду

$$M[V] = \sum_e p(e) \sum_x p(x/e) \sum_d p(d/e, x), \sum_\lambda p(\lambda/e, x, d) \cdot V(e, x, d, \lambda);$$

здесь $p(e)$, $p(x/e)$, $p(\lambda/e, x)$ и $p(\lambda/e, x, d)$ – вероятности, которые должны быть заданы или определены.

Значения $p(e)$ и $p(d/e, x)$ зависят от лица, принимающего решение (ЛПР). Оно определяет эти значения, выбирая такие e и d, чтобы при случайных x и λ максимизировать среднюю априорную прибыль.

Порядок решения задачи с использованием дерева решений следующий:

1) задать интервал дискретизации Δx и $\Delta\lambda$ и непрерывные x и λ заменить дискретными;

2) назначить вероятности $p(\lambda)$ и $p(x/\lambda, e)$;

3) определить вероятности для "случайных узлов" в дереве решений;

4) задать значение прибыли $V(e, x, d, \lambda)$ в каждой вершине дерева;

5) двигаясь в обратной хронологической последовательности по дереву решений, осредняя прибыль по вероятности в "случайных узлах" и максимизируя среднюю прибыль за счет выбора вероятностей в "узлах принятия решений", выработать наилучший план теста, т.е. определить количество испытываемых устройств и среднюю прибыль, получаемую от использования данного теста, и принять решение (заключить договор или нет), когда результат теста станет известен.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие исходные данные Вам известны на начало разработки системы?

2. Какими факторами определяется прибыль предприятия?

3. Что такое дерево решений?

4. Каков алгоритм решения задачи?

5. Что включает в себя анализ результатов эксперимента?

6. Как влияет стоимость теста $C(n)$ на выбор оптимального действия?

7. Как влияет размер эксперимента на апостериорную плотность вероятности $f(\lambda)$?

Работа 3. АНАЛИЗ ПРИНЦИПОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Цель работы – приобретение практических навыков в использовании различных принципов выбора оптимальных решений в условиях неопределенности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве объекта исследования принимается статистическая модель принятия решений в условиях неопределенности.

Для заданной ситуации принятия решений, которая характеризуется: $D = \{d_1, \ldots d_j, \ldots d_m\}$ – множеством решений органа управления (лица, принимающего решения); множеством $S = \{s_1, \ldots, s_i, \ldots s_n\}$ состояний среды; множеством значений оценочного функционала $u(S, d) = \{u_{i,j}\}$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$. Причем все $u_{ij} > 0$. Предполагается, что ЛПР при принятии решений исходит из условий достижения $\max\limits_{d_j \in D} u_{ij}$, т.е. оценочный функционал можно трактовать как функцию полезности.

Требуется проанализировать решения, получаемые при использовании различных критериев оптимизации, и построить области условных решений.

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя исходные данные, характеризующие ситуацию принятия решений.

2. Для заданной ситуации определить оптимальные решения, найденные на основе применения критериев Байеса, максимальной вероятности, минимальной дисперсии, модального критерия, минимума энтропии математического ожидания оценочного функционала.

3. Составить программу для определения на ЭВМ условных решений, приняв в качестве главного один из вышеприведенных критериев

(по указанию преподавателя), а остальные критерии рассматривая в качестве ограничений.

4. Построить области условных решений в зависимости от величин задаваемых ограничений на критерии.

5. Провести анализ результатов и сделать выводы.

6. Оформить бригадный отчет по работе.

7. Ответить на контрольные вопросы.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Ситуация принятия решений характеризуется случаем, когда ЛПР располагает знанием априорного распределения вероятностей:

$$P=(p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad p_i = p(S=s_i),$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ на элементах $s_i = S$ состояний среды.

2. В работе необходимо использовать для определения оптимального решения следующие критерии:

а) критерий Байеса $\mathscr{X}_1$. Согласно критерию Байеса, оптимальными (либо множеством таких оптимальных решений) считают такие решения, для которых математическое ожидание оценочного функционала достигает наибольшего возможного значения:

$$R^*(d_j^*, P) = \max_{d_j \in D} R(d_j, P) = \max_{d_j \in D} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i u_{ij} \right];$$

б) критерий максимизации вероятности распределения оценочного функционала $\mathscr{X}_2$. Сущность данного критерия заключается в нахождении решения $d_j^* \in D$ (либо множества решений), для которого

$$P(u_{ij}^* \geqslant \alpha) = \max_{d_j \in D} P(u_{ij} > \alpha),$$

где α – фиксированный уровень, задаваемый из условий выполнения ограничений $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$;

$$\alpha_1 = \min_i \min_j u_{ij},$$

$$\alpha_2 = \max_i \max_j u_{ij}, \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,m}.$$

Для фиксированных α и d_j неравенство $u_{ij} \geqslant \alpha$ определяет множество состояний среды $S_{\alpha,j}$. Тогда вероятность $p(u_{ij} > \alpha)$ будет

$$p(u_{ij} \geqslant \alpha) = p(S = s_{\alpha,j}) = \sum_{s_j \in S_{\alpha j}} p(S = s_j);$$

в) критерий минимума дисперсии оценочного функционала $\mathscr{X}_3$. Для каждого решения $d_j \in D$ определим среднее значение оценочного функционала и σ_j^2:

$$R(d_j, P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_{ij};$$

$$\sigma_j^2 = \sigma^2(d_j, P) = \sum_{i=1}^{n} \left[u_{ij} - R(d_j, P) \right]^2 p_i.$$

Дисперсия σ_j^2 характеризует рассеивание случайной величины значения оценочного функционала для решения d_j относительно среднего значения $R(d_j, P)$.

Сущность критерия минимизации дисперсии оценочного функционала заключается в нахождении решения d_j^*, для которого

$$\sigma^2(d_j^*, P) = \min_{d_j \in D} \sigma^2(d_j, P);$$

г) модальный критерий $\mathscr{X}_4$. Сущность этого критерия заключается в том, что ЛПР исходит из наиболее вероятного состояния среды. Предположим, что существует единственное значение

$$p_{i_1} = \max_{s_i \in S} P(S = s_i).$$

При использовании этого критерия ЛПР полагает, что среда находится в состоянии $s_{i_1} \in S$ и оптимальное решение d_j^* определяется из условия

$$u_{i_1 j}^* = \max_{d_j \in D} u_{i_1 j}.$$

Если же окажется, что максимум $P(S = s_i)$ достигается на априорных вероятностях $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_e}$, то оптимальное решение d_j^* определяется из условия

$$\frac{1}{e} \sum_{r=1}^{e} u_{i_r j}^* = \max_{d_j \in D} \frac{1}{e} \sum_{r=1}^{e} u_{i_r j};$$

д) критерий минимума энтропии математического ожидания оценочного функционала $\mathscr{X}_5$. Энтропию математического ожидания оценочного функционала для решения $d_j \in D$ определим следующим образом:

$$H(d_j, P) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i u_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_i u_{ij}} \right) \ln \left(\frac{p_i u_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_i u_{ij}} \right).$$

Сущность этого критерия заключается в нахождении решения d_j^* из условия

$$H(d_j^*, P) = \min_{d_j \in D} H(d_j, P).$$

3. Из множества критериев $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ выделить (по указанию преподавателя) один критерий, а на остальные наложить ограничения. Такое решение будем называть условным, т.е., если x_g – главный критерий, то условные решения находятся из следующей задачи:

$$x_g(d_j^*) = \underset{d_j \in D}{opt}\; x_g(d_j),$$

$$c_{f_н} \leq x_f \leq c_{f_в} \qquad (f = 1, 2, \dots),$$

где $c_{f_н}$ – нижнее ограничение на значение критерия x_f ; $c_{f_в}$ – верхнее ограничение на значение критерия x_f .

4. При составлении программ необходимо предусмотреть возможность задания ограничений на отдельные критерии в диалоговом режиме ЛПР – ЭВМ.

5. Для построения области условных решений в зависимости от величин ограничений $c_{f_н}$ и $c_{f_в}$ провести расчет оптимальных значений x_g при различных значениях величин $c_{f_н}$ и $c_{f_в}$, задавая эти значения самостоятельно.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими данными характеризуется модель принятия решений в условиях неопределенности?

2. Какие критерии выбора оптимальных решений Вы знаете? В чем их отличие?

3. Что такое условное решение?

Р а б о т а 4. ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ

Цель работы – освоение методов решения матричных антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой и реализация их на ЦВМ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу проектирования ряда технических систем, работающих в условиях конфликта, иногда можно свести к задаче решения матричной антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой. При этом предполагается, что в игре участвуют два игрока А и В, интересы которых противоположны. Каждый игрок имеет конечное множество стратегий. Для каждой пары стратегий игроков А и В определена плата, которую один игрок платит второму, и, следовательно, выигрыш одного равен проигрышу другого.

Решением данной игры является определение оптимальных стратегий каждого игрока, выигрыш (проигрыш) каждого игрока, а также цены игры.

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Составить платежную матрицу $\| a_{ij} \|$ размером ~~5 x 5~~ 9 × 9, имеющую седловую точку и найти для нее решение игры.

2. Составить платежную матрицу 2 х 4, не имеющую седловой точки и найти решение игры графическим способом.

3. Составить платежную матрицу ~~3 х 3~~ !5x5! без седловой точки, для которой необходимо:

а) привести задачу решения данной игры к задаче линейного программирования в двух различных формах;

б) выполнить 8 итераций приближенного итеративного метода решений. Результаты привести в форме табл. 4.2. Для каждого члена бригады начальную стратегию брать различной;

в) решить задачу на ЦВМ и сопоставить полученные промежуточные результаты с п. б).

4. Построить график "верхней" $\bar{\gamma}_2(k)$ и "нижней" $\underline{\gamma}_1(k)$ цены игры как функции числа итераций К.

5. Придумать задачу, которая может быть решена как антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой.

6. Составить отчет.

7. Ответить на контрольные вопросы.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Решение игры с седловой точкой.

Пусть задана платежная матрица $\| a_{ij} \|$ (табл. 4.1).

Т а б л и ц а 4.1

Стратегии игрока А	Стратегии игрока В				Минимальный элемент строки
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	9	4	5	1
A_2	7	6	5	8	5
A_3	2	3	5	10	2
Максимальный элемент столбца	7	9	5	10	

Среди минимальных элементов строк находим максимальный: $a_{23} = 5$; среди максимальных элементов столбца находим минимальный: $a_{32} = 5$. Цена игры $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 5$. Оптимальная стратегия игрока А – A_2. Оптимальная стратегия игрока Б – B_3.

2. Графический метод решения игры без седловой точки.

Этим методом легко решать игры, имеющие матрицы $2 \times n$ и $m \times 2$, но его использование затруднено для игр, имеющих матрицы $3 \times n$ и $m \times 3$, и он вообще неприменим для игр более высокого порядка. Рассмотрим игру с платежной матрицей:

$$\| a_{ij} \| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это матрица без седловой точки.

Если игрок А применяет смешанную стратегию $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, а игрок В – чистую стратегию B_1, то математическое ожидание выигрыша игрока А:

$$\gamma(B_1, p) = 2p + 7(1-p) = 7 - 5p.$$

Если игрок В применит чистую стратегию B_2, то математическое ожидание выигрыша игрока А будет:

$$\gamma(B_2, p) = 3p + 5(1-p) = 5 - 2p,$$

соответственно для стратегии B_3:

$$\gamma(B_3, p) = 11p + 2(1-p) = 2 + 9p.$$

Видно, что математическое ожидание выигрыша игрока А при условии, что В использует чистую стратегию, является линейной функцией от p. Изобразим их на графике (рис. 4.I). Ордината точки R будет определять цену игры γ, а ее абсцисса – оптимальную вероятность p.

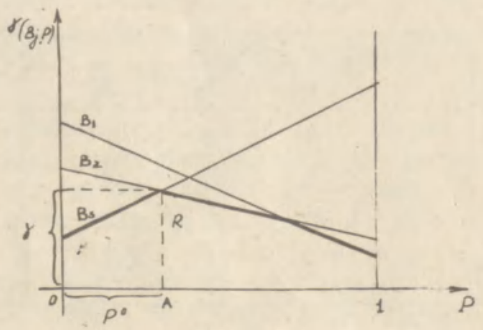

Рис. 4.I

Оптимальные стратегии игрока А $S_A^0 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}$, цена игры $\gamma = \frac{49}{11}$.

В теории игр доказывается, что для любой игры $m \times n$, где $m < n$, существует решение, в котором с каждой стороны участвует не более чем m активных стратегий. Отсюда следует, что для любой игры $2 \times n$ есть решение, в котором с каждой стороны участвует не более двух активных стратегий. Таким образом, любая игра $2 \times n$ сводится к игре 2 x 2.

Из рис. 4.I видно, что стратегия B_I не войдет в оптимальную смешанную стратегию игрока В и, следовательно, мы можем найти оптимальную стратегию игрока В из матрицы

$$\| a_{ij} \| = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

проделав аналогичные построения:

$$S_B^0 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

3. Аналитическое решение игр без седловой точки.

Пусть цена игры с матрицей $\| a_{ij} \|$ больше нуля ($\gamma > 0$). Это всегда можно сделать, прибавляя к каждому элементу матрицы достаточно большую положительную величину. При этом решение игры не изменится [5].

Запишем выражение среднего выигрыша игрока А при его оптимальной стратегии S_A^0 и любой стратегии B_j противника:

$$u_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \ldots + p_m a_{mj}, \quad j = 1, \ldots n.$$

Согласно свойству оптимальных стратегий [I], можно записать следующие неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geq \gamma, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geq \gamma, \\ \ldots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geq \gamma, \end{array}\right\}$$

которые при делении на γ можно представить в виде

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq 1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq 1, \end{array}\right\} \qquad (4.I)$$

где $x_1 = \frac{p_1}{\gamma}$; $x_2 = \frac{p_2}{\gamma}$; ...; $x_m = \frac{p_m}{\gamma}$.

Принимая во внимание, что $\gamma > 0$, $p_i > 0$ (i = I,2,..., n) и $\sum_{i=1}^{m} p_i$ = I, получаем $x_i \geqslant 0$ (i = I, ..., n). Следовательно, максимум величины γ соответствует минимуму суммы

$$L = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

и задача нахождения решения игры свелась к задаче линейного программирования, в которой линейная форма задана в виде суммы L, а ограничения – в виде неравенств (4.I).

Пример. Дана платежная матрица

$$\| a_{ij} \| = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (4.2)$$

Согласно (4.I) можно записать:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 &\geqslant 1, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 &\geqslant 1, \\ 7x_1 + 0x_2 + 5x_3 &\geqslant 1, \\ L = x_1 + x_2 + x_3 &\longrightarrow min, \end{aligned}$$

где $x_i = \frac{p_i}{\gamma}$ (i = I, 2, 3).

Требуется найти неотрицательные значения x_1, x_2, x_3, которые минимизируют функцию L при ограничениях (4.I).

4. Приближенное решение игры (итеративным методом).

Рассмотрим приближенный метод решения матричных игр для платежной матрицы (4.2). В табл. 4.2 приведены первые 4 шага итеративного процесса.

Сущность метода заключается в следующем.

Дана матрица $\| a_{ij} \|$ игры ($m \times n$) i = I,..., m ; j = I,..., n. Игра многократно повторяется и предполагается, что каждый из игроков выбирает ту из своих чистых стратегий, которой соответствует наилучший накопленный (суммарный) результат за все предшествующие повторения игры. Для игрока А это максимальный накопленный выигрыш, а для В – минимальный накопленный проигрыш (эти данные в табл. 4.2 подчеркнуты).

В первой игре стратегии А и В выбираются произвольно.

Пусть осуществлено k повторений игры, в которых чистые стратегии А и В появились с частотами:

$$p_i(k) \quad \text{и} \quad q_j(k).$$

Тогда накопленные результаты игры соответственно для стратегий А и В будут:

$$\nu_j(k) = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и

$$\mu_i(k) = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где a_{ij_s} – результат игры при стратегиях А и В при s-м повторении игры.

На k-й итерации игры максимальный накопленный выигрыш игрока А и минимальный накопленный проигрыш игрока В, а также верхняя и нижняя цены игры соответственно будут:

$$\max_i \nu_i(k) = k\gamma_1(k); \quad \min_j \mu_j(k) = k\gamma_2(k).$$

В теории игр доказано, что

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_1(k) = \lim_{k \to \infty} \gamma_2(k) = \gamma.$$

Это значит, что выигрыши игроков А и В стремятся к цене игры, а их смешанные стратегии

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_B = \begin{pmatrix} B_1, \ldots, B_n \\ q_1, \ldots, q_n \end{pmatrix}$$

приближаются к оптимальным смешанным стратегиям.

Об окончании итеративного процесса выбора стратегий можно судить по значению величины

$$\Delta(k) = \min_{1 \leqslant s \leqslant K} \gamma_1(s) - \max_{1 \leqslant s \leqslant K} \gamma_2(s).$$

Когда при некотором $k = N$ величина $\Delta(N)$ не превышает заданного значения, процесс повторений игры прекращают и принимают за приближенную цену игры

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[\min_{1 \leqslant s \leqslant N} \gamma_1(s) + \max_{1 \leqslant s \leqslant N} \gamma_2(s) \right],$$

а за оптимальные стратегии принимают

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix}, \quad S_B = \begin{pmatrix} B_1, \ldots, B_n \\ q_1, \ldots, q_n \end{pmatrix},$$

для которых реализуются соответственно

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant N} \gamma_2(s) \quad \text{и} \quad \min_{1 \leqslant s \leqslant N} \gamma_1(s).$$

Т а б л и ц а 4.2

k	i_k	$\mu_1(k)$	$\mu_2(k)$	$\mu_3(k)$	$\gamma_2(k)$	$\max\gamma_2(k)$	j_k	$\nu_1(k)$	$\nu_2(k)$	$\nu_3(k)$	$\gamma_1(k)$	$\min\gamma_1(k)$	Δk
I	I	5	I	7	I	I	2	I	5	7	7	7	6
2	3	7	8	I2	3,5	3,5	I	6	I3	~~I4~~9	6,5	6,5	3
3	2	I5	I3	I2	4	4	3	I3	I3	I4	4,666	4,666	0,66
4	3	I7	20	I7	4,25	4,25	I	I8	2I	I6	5,25	4,666	0,4I6

Решение игры, полученное при этих 4 итерациях, следующее:

$$\gamma = 4{,}458; \quad S_A^* = \begin{pmatrix} A_I & A_2 & A_3 \\ \frac{I}{4} & \frac{I}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_I & B_2 & B_3 \\ \frac{2}{4} & \frac{I}{4} & \frac{I}{4} \end{pmatrix} \quad \Delta k = 0{,}4I6.$$

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Что такое игра с нулевой суммой?

2. Что такое чистая и смешанная стратегии?

3. Что называется решением игры в чистых и смешанных стратегиях?

4. Каковы свойства оптимальных стратегий?

5. Что такое активная стратегия?

6. В чем смысл теоремы Неймана?

7. Каковы основные методы решения матричных игр и налагаемые на эти методы ограничения?

8. Как можно использовать алгоритм линейного программирования для нахождения решения игры?

9. В чем сущность итеративного метода решения?

IO. Чем определяется сходимость при использовании итеративного метода решения?

ЛИТЕРАТУРА

I. Р о с и н М.Ф., Б у л ы г и н В.С. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. – М.: Машиностроение, I98I.

2. Т р у х а е в Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, I98I.

3. В е н т ц е л ь Е.С. Введение в исследование операций. – М.: Советское радио, I972.

4. Б е з б о р о д о в а Т.И., Б о м а с В.В., З а й ц е в А.В. и др. Руководство к лабораторным работам по курсу "Теория игр и статистических решений". – М.: МАИ, I975.

5. Howard R. Bayes desision models for system development IEEE Transaction on System science and cybernetics. V. ssc-6, 1978, N 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Тем. план I986, поз. 24

Константин Гаврилович Кулешов
Александр Иванович Павленко
Михаил Федорович Росин

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ
"ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ II"

Редактор Е.В. Лисовец
Техн. редактор В.Н. Ильина
Подписано к печати 4.03.86
Формат 60х84 I/I6. Бум. тип. № 2
Усл. печ. л. I,75; уч.-изд. л. I,50. Тираж 500
Зак. /57 /I479. Бесплатно
Ротапринт МАИ
I2587I, Москва, Волоколамское шоссе, 4