Практические занятия ДМ ПМ

Занятие 1
В некой сказке узник должен угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой - тигр. Если он укажет на первую комнату, то женится на принцессе, если на вторую, то его (вполне возможно) растерзает тигр. В некотором царстве правил король. Однажды он тоже прочитал эту сказку.
- В самый раз для моих заключенных! - сказал он своему министру. - Только я не хочу полагаться на случайности. Пусть на дверях каждой комнаты повесят по табличке, а заключенному будет кое-что сказано о них. Если узник не дурак и способен рассуждать логически, он сумеет сохранить себе жизнь и в придачу заполучить прелестную невесту.
- Блестящая идея, ваше величество! - согласился министр.

Испытания первого дня

В самый первый день были проведены три испытания. При этом король объявил узнику, что в ходе всех трех испытаний в каждой из комнат будет находиться либо принцесса, либо тигр, хотя вполне может статься, что сразу в обеих комнатах обнаружится по тигру или там окажутся одни лишь принцессы.

Испытание

- А что, если в обеих комнатах сидят тигры? - спросил узник. - Что же мне тогда-то делать?
- Считай, не повезло, - ответил король.
- А если в обеих комнатах окажется по красавице? - поинтересовался узник.
- Считай, подфартило, - сказал король. - Уж это ты и сам бы мог сообразить!
- Ну, хорошо, а если в одной комнате принцесса, а в другую посадили тигра, что тогда? - не успокаивался узник.
- Вот тут-то уже все зависит от тебя! Не так ли?
- Да откуда же мне знать, где кто? - сокрушенно вздохнул узник.

Тут король указал на таблички, прикрепленные к дверям каждой из комнат. На них было написано:

I В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр	II В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр

- А это правда, что здесь написано? - спросил узник.
- На одной - правда, - отвечал король, - на другой - нет.

А вы на месте узника, какую бы дверь открыли? (Конечно, если вы предпочитаете принцессу тигру.)

Здесь и далее: Необходино формализовать задачу в виде формул логики высказываний, найти допустимые комбинации значений атомов, которые обеспечат правильный выбор для узника, при условии что он предпочетает принцессу тигру.
Проверку решений провести «вручную» и на Python:

```
from sympy.logic.boolalg import to_dnf
from sympy import symbols
x1, x2 = symbols('x1 x2')
y = x2 & ~x1
to_dnf(x1^y,simplify=True)
```

Испытание.

Итак, первый узник спас себе жизнь и на радостях отбыл вместе с принцессой. Таблички на дверях сменили, соответственно были подобраны и обитатели комнат. На этот раз на табличках можно было прочитать следующее:

I По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса	II Тигр сидит в другой комнате

- Истинны ли утверждения на табличках? - спросил второй узник.
- Может, оба истинны, а может, оба ложны, -ответил ему король.

Какую из комнат следует выбрать узнику?

День второй
- Вчера мы сваляли дурака, - сказал король своему министру. - Все выкрутились! Ладно, сегодня я придумаю для них кое-что похлеще.
- Блестящая идея, ваше величество! - поддержал министр.
И во всех испытаниях этого дня относительно левой комнаты (комната I) король говорил вот что:
- Если в этой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, то ложно.
В правой же комнате (комната II) все было наоборот: утверждение на табличке ложно, если в комнате находится принцесса, и истинно, если в комнате сидит тигр. Ну и опять же, вполне может статься, что в обеих комнатах находятся принцессы или в них сидит по тигру, либо, наконец, в одной комнате пребывает принцесса, а в другой - тигр.
Испытание.
Объявив эти правила следующему узнику, король указал на две новые таблички:

I В обеих комнатах находятся принцессы	II В обеих комнатах находятся принцессы.

Какую из комнат следует выбрать на этот раз узнику?

Испытание
Условия те же, а таблички вот какие:

I По крайней мере в одной из комнат находится принцесса	II Принцесса - в другой комнате

Испытание
Этой задачкой король особенно гордился, равно как и следующей за ней.

I Что ни выберешь - все едино	II Принцесса - в другой комнате

Как должен поступить узник?

Третий день
- Проклятье! - воскликнул король. - Опять все наши узники ускользнули. Я думаю, завтра надо занять
три комнаты вместо двух. В одну поместим принцессу, а в две другие - по тигру. Поглядим, каково придется нашим умникам!
- Блестящая идея, ваше величество! - сказал министр.
- Ваши оценки, мой друг, крайне лестны для меня, хотя и несколько однообразны, - поморщился король.
- Блестяще сказано, ваше величество! - воскликнул министр.
Испытание
Итак, на третий день король сделал все так, как задумал. Узнику были предложены на выбор три комнаты, в одной из которых, как объяснил король, находилась принцесса, а в двух других сидели тигры.
На дверях комнат были повешены следующие таблички:

I В этой комнате сидит тигр	II В этой комнате находится принцесса	III Тигр сидит в комнате II

При этом король Добавил, что не более одного из этих утверждений является истинным. Где принцесса?

11. Три возможности.
Это испытание было еще каверзнее. Король объяснил узнику, что в одной из комнат сидит принцесса, в другой - тигр, а третья комната пуста. При этом надпись на двери комнаты, в которой находится принцесса, - истинна, надпись на двери, за которой сидит тигр, - ложна, а то, что написано на табличке у пустой комнаты, может оказаться как истинным, так и ложным. Вот эти таблички:

I Комната III пуста	II Тигр сидит в комнате I	III Эта комната пуста

А узник раньше видел эту самую принцессу и совсем не прочь был жениться на ней. Поэтому, хотя пустая комната, конечно, получше комнаты с тигром, узнику все же хотелось угадать, где принцесса.
Так где же принцесса, а где тигр?

Занятие 2

1. Будут ли следующие формулы тождественно истинны:

а) $X \& Y \to X$, б) $X \vee Y \to X$, в) $X \& Y \to X \vee Y$,
г) $X \vee Y \to X \& Y$, д) $(X\to Y)\to(Y\to X)$, е) $(X\to\neg X)\to X$,

2. Существует ли формула F такая, что формула G тождественно истинна:

а) $G = X \& Y \to \neg (F \& Z)$; б) $G = (F \& Y\to\neg Z) \to(Z\to\neg Y)$;
в) $(F\&Z) \vee (\neg F\&\neg Y\&\neg Z)$

3. Будут ли следующие формулы равносильны:

а) $X \to Y$ и $\neg Y \to\neg X$, б) $\neg X \to Y$ и $\neg Y \to X$
в) $X\to (Y\to Z)$ и $(X\to Y) \to Z$, г) $X \to (Y \to Z)$ и $X \& Y\to Z$,

4. Доказать равносильность формул:

а) $\neg[(X\vee Y)\&(X\&\neg Z)]$ и $X\to Z$, б) $(X\&\neg Y)\vee\neg(X\&Y)$ и $\neg(X\&Y)$
в) $\neg[(X\vee\neg Y)\&Y]\&\neg(\neg X\&Y)$ и $\neg Y$ г) $\neg [(X \& Y) \vee \neg Z]$ и $\neg (Z\to X) \vee \neg(Z\to Y)$,

5. Доказать, что формула G является логическим следствием формул $F_1,F_2,...,F_n$:

а) $F1=X \to Y \vee Z$, $F2=Z\to W$, $F3=\neg W$, $G=X\to Y$;
б) $F1=X\vee Y\vee\neg Z$, $F2=X\to X1$, $F3=Y\to Y1$, $F4=Z$, $G=X1\vee Y1$;
в) $F1=X\to Y\&Z$, $F2=Y\to(Z1\vee Z2)$, $F3=Z\to Z1$, $F4=\neg Z1$, $G=X\to Z2$;

6. Доказать, что формула G не является логическим следствием формул $F_1,F_2,\ldots,F_n$:

а) $F1=X\neg Y\vee Z$, $F2=Y\to W$, $F3=Z\to X$, $G=X \to W$;
б) $F1=X\to Y$, $F2=Y\to Z$, $F3=Z\to Z1\vee Z2$, $G=X\to Z1$;

7. Определить, какая логическая связка используется в следующих выражениях: "А, если В", "коль скоро А, то В", "в случае А имеет место В", "как А, так и В", "для А необходимо В", "для А достаточно В", "А вместе с В", "А не имеет места", «А, только если В», «или А, или В», «А одновременно с В», «А – то же самое, что и В».

Занятие 3

8. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Будет ли логичным рассуждение?

1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над

производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут, и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или я пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

4. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

Занятие 4

1. Какой из кванторов определяется следующими выражениями:

«для всякого x истинно F(x)»,

«F(x) при произвольном x», «найдется x, такой что F(x)», «для подходящего x верно F(x)»,»всегда имеет место F(x)», «каждый элемент обладает свойством F», «найдется, по крайней мере, один x такой, что F(x)», «существует не менее одного x, что F(x) «, «свойство F присуще всем», «каким бы ни был x F(x истинно», «хотя бы для одного x верно F(x) «.

2. Дана алгебраическая структура <N; x≤y>. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma=(\leq)$:

а) «x меньше y»,

б) «y равно x+1»,

в) «x равно 1»,

3. Дана алгебраическая структура <N; x|y>. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma=(|)$ x|y означает, что x делит y нацело:

а) «x равно 1»,

б) «z есть НОD(x, y)»,

в) «z есть НОК(x,y)»,

НОК – наименьшее общее кратное

4. Пусть M – множество всех точек, прямых и плоскостей трехмерного пространства. Рассмотрим алгебраическую систему < M; x∈y, p(x), l(x), pl(x) >, где ∈ – отношение принадлежности, p(x) означает, что x есть точка, I(x) – x есть прямая, pI(x) – x есть плоскость.

Выразить следующие предикаты формулами указанной сигнатуры:

а) «плоскости x и y имеют общую точку»,

б) «если плоскости x и y имеют общую точку, то они имеют общую прямую»,

в) «прямые x и y имеют общую точку».

Занятие 5

5. Подберите сигнатуру и представьте следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

5.1. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, ряд первокурсников знаком с некоторыми спортсменами.

5.2. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

6. Будут ли равносильны следующие пары формул:

а) $(\forall x)(F(x)\vee G(x))$ и $(\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x)$;

б) $(\exists x)(F(x)\&G(x))$ и $(\exists x)F(x)\&(\exists x)G(x)$;

в) $(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$ и $(\forall x)F(x)\rightarrow(\forall x)G(x)$.

<u>*Занятие 6*</u>

7. Доказать равносильность формул:

а) $\neg(\exists x)[(\forall y)P(x,y)\rightarrow(\forall z)(P(z,z)\vee Q(z))]$ и $(\forall x)(\forall y)(\exists z)[P(x,y)\&\neg P(z,z)\&\neg Q(z)]$;

б) $\neg(\forall x)[T(x)\rightarrow(\exists y)(\forall z)(R(y,z)\&T(z)\rightarrow R(z,z))]$ и

$(\exists x)(\forall y)(\exists z)[T(x)\&\neg R(z,z)\&\neg(R(y,z)\rightarrow\neg T(z))]$;

в) $(\forall x)[(\forall y)P(x,y)\rightarrow(\exists z)(P(x,z)\&Q(z))]$ и $(\forall x)(\exists u)[P(x,u)\rightarrow Q(u)]$.

8. Привести к предваренной нормальной форме:

а) $(\forall x)F(x)\rightarrow(\forall y)G(y) = (\exists x)\neg F(x)\vee(\forall y)G(y) = (\exists x)(\forall y)[\ )\neg F(x)\vee G(y)]$

б) $(\exists x)F(x)\rightarrow(\exists x)G(x)$;

9. Привести к сколемовской нормальной форме:

а) $(\exists x)[P(x)\&(\forall y)(S(y)\rightarrow T(x,y))]$,

б) $(\forall x)[Q(x)\rightarrow(\exists y)(\forall u)(R(x,y)\&S(y,u))]$,

в) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)[L(x,y,z)\&M(z,u,v)]$

<u>*Занятие 7*</u>

10. Дано утверждение: «Некоторые из первокурсников знакомы с кем-либо из спортсменов. Но ни один из первокурсников не знаком ни с одним любителем подледного лова».

Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:

а) «ни один спортсмен не является любителями подледного лова»]

б) «некоторые из спортсменов не являются любителем подледного лова».

11. Докажите нелогичность следующих рассуждений, построив интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

11.1 Все студенты нашей группы – члены клуба «Спартак». А некоторые члены клуба «Спартак» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

11.2. Некоторые студенты нашей группы – болельщики «Спартака». А некоторые болельщики «Спартака» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

12. Доказать методом резолюций что из F1,F2…Fn следует G:

1) F1 = not P or not Q or R, F2 = not P or not Q or S, F3= P, F4 = not S, G = not Q

2) F1= any x (C(x)->(W(x)&R(x)), F2= exists x (C(x)&O(x)), G= exists x (O(x)&R(x))

3)

F_1: $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(D(y)\rightarrow L(x, y)))$,

F_2: $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)(Q(y)\rightarrow\sim L(x, y)))$,

G: $(\forall x)(D(x)\rightarrow\sim Q(x))$.

Занятие 8

1. Рассмотрим информационную систему под условным названием «Кадры», которая содержит сведения о сотрудниках некоторой организации. Для представления информации используются атрибуты: ФАМ – фамилия сотрудника, ПОЛ –пол сотрудника, ВОЗР – возраст, ДОЛЖ – должность, НОМ – номер отдела (подразделения) этой организации. Сведения хранятся в виде двух отношений СОТР(ФАМ, НОМ, ДОЛЖ), АНК(ФАМ, ПОЛ, ВОЗР). Первое отношение содержит фамилии сотрудников, их должность и номера отделов, где работают эти сотрудники. Второе отношение хранит анкетные данные: фамилию, пол и возраст сотрудника. Кроме того, система может вычислять отношения Мен(x,y)=«x меньше y», определенное на множестве натуральных чисел, точнее, на домене атрибута ВОЗР.

Перевести следующие запросы на язык логики первого порядка:

1. Кто из сотрудников–мужчин старше 40 лет?
2. Кто из сотрудников старше 40 лет и в каком отделе работает?
3. Кто из программистов старше 40 лет и в каком отделе работает?
4. В каких отделах все программисты моложе 40 лет?
5. В каких отделах работают пенсионеры?
6. В каких отделах все программисты – пенсионеры?

2. Рассмотрим предметную область, которую можно назвать «Учеба на факультете». Даны следующие множества: СТУД, ПРЕП, ПРЕД, ГР, КУРС, АУД, ДЕНЬ, НАЧ, которые интерпретируются соответственно, как множества студентов, преподавателей. изучаемых предметов, групп, курсов, аудиторий, дней недели, времени начала занятий. На этих множествах заданы предикаты ГР(СТУД,ГР), КУРС(ГР,КУРС), РАСП(НАЧ,ДЕНЬ,ГР,ПРЕД,ПРЕП,АУД), РАНЬШЕ(НАЧ,НАЧ). Первый определяет принадлежность студента группе. Второй – группы курсу, третий представляет собой факультетское расписание на неделю (предполагается, что нет поточных лекций, лабораторных занятий с частью группы и что все занятия проводятся каждую неделю). Последний предикат определяет, когда одно занятие проводится раньше другого по времени, в течение одного дня. В сигнатуру можно добавлять константы. Которые интепретируются как элементы указанных множеств. Например, ИВАНОВ – студент, ПЕТРОВ – преподаватель, 03–101 – группа, 09-00 – начало занятий. ФИЗКУЛЬ – физкультура.

Перевести следующие утверждения:

1. Один и тот же преподаватель не может в одно и то же время проводить занятия в разных аудиториях.
2. Два занятия по одному предмету в один и тот же день не проводятся.
3. Занятия физкультурой проводятся сразу во всех группах.
4. В течение недели проводятся два занятия физкультурой.
5. Занятия физкультурой проводятся последней парой.
6. В субботу проводится не более трех занятий.
7. У каждой группы 4 и 5 курсов есть день, свободный от аудиторных занятий.
8. В группе 03–101 каждый день есть не менее трех занятий.
9. Если в группе в какой то день есть занятие, то есть, по крайней мере, еще одно.

3. Рассмотрим предметную область, которую условно назовем «Аэропорт». Выбрать сигнатуру многосортной логики для представления следующей информации о (недельном) расписании движения самолетов и выразить указанные утверждения формулами.

1. В Москву каждый день выполняется не менее трех рейсов.
2. В Ростов есть, по крайней мере, три рейса в неделю.

3. Нет двух рейсов до Минеральных Вод в один день.
4. В понедельник рейс до Краснодара выполняется раньше рейса до Ростова.
5. Первый рейс до Москвы выполняется раньше рейса до Ростова.
6. Между первыми двумя рейсами до Москвы есть рейс до Новосибирска.

4. Рассмотрим предметную область «Счета в банке». В банке обслуживается множество клиентов. У каждого клиента есть множество счетов. По счету совершаются определенные операции. Для описания предметной области используются следующие предикаты: КЛИЕНТ(ФИО, ВОЗРАСТ, ПОЛ), СЧЕТ(ФИО, НОМЕР_СЧЕТА, ВАЛЮТА), ОПЕРАЦИЯ(НОМЕР_СЧЕТА, ДАТА, ТИП, СУММА).
Перевести следующие запросы на язык логики предикатов:

1. Есть ли клиенты, у которых нет ни одного счета?
2. Кого из активных клиентов надо поздравить с 8 марта? Активный клиент – это тот, кто совершил хотя бы одну операцию начиная с первого января 2010 года.
3. Кого из активных клиентов надо поздравить с 23 февраля?
4. В какие дни и кто совершал операции в валюте отличной от рублей на суммы более 1 млн.
5. Есть ли пенсионеры, которые открывали счета в евро?
6. Кто совершал более 1-й операции одного типа в один день?