

Дискретная математика

Судаков Владимир Анатольевич

sudakov@ws-dss.com

2019

Контроль успеваемости

- Практические занятия + домашние задания
- Контрольная работа
- Зачет (1 семестр) + Экзамен (2 семестр)

Посещаемость учитывается

Литература

- Хаггард Г., Шлипф Дж., Уайтсайдс С. Дискретная математика для программистов. – М.: БИНОМ, 2010.
- Гисин В.Б. Дискретная математика. Учебное пособие и практикум. — М. «Юрайт», 2016. — 384 с.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. М.: Вильямс, 2004. – 960 с.
- Клини С.К. Математическая логика. – М.: Изд-во Мир, 1973
- Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука. 1983.
- Пенроуз Р. Новый ум короля. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
- Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2016. – 528 с
- Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982.

Цели курса:

- познакомить студентов с базовыми понятиями дискретной математики,
- научить переводу с естественного языка на язык математических моделей и алгоритмов,
- сформировать навыки использования методов дискретной математики,

которые широко применяются при ***анализе данных и принятии решений в экономике и финансах.***

Зачем изучать дискретную математику?

- Математика - это язык однозначного описания сложных проблем/ситуаций
- Математика – это инструмент для размышлений: она позволяет анализировать/искать решение в сложных проблемных ситуациях
- Дискретные объекты существуют везде
- Дискретные объекты - основа компьютерных наук
- Компьютеры в основном оперируют только дискретными числами
- Дискретная математика необходима для формального анализа данных и поддержки процессов принятия решений

Зачем не нужно изучать дискретную математику?

- Сложные проблемы (когда нужно думать) встречаются в практике большинства программистов/аналитиков редко
- Человек может быть хорошим программистом и не знать дискретной математики (он знает/оперирует аналогичными понятиями языка программирования)

Но....

- Программирование – начало активного развития 50-е года прошлого века
- Математика и логика – 4 век до нашей эры

Некоторые из применений

- SQL и MDX
- Формализация требований к системам
- Искусственный интеллект (машинное обучение и инженерия знаний)
- Построение и верификация моделей

Определение дискретной математики

Дискретная математика - часть математики, изучающая дискретные математические структуры.

- Дискретность (от лат. *discretus* — разделённый, прерывистый) — свойство, противопоставляемое непрерывности, прерывность. Под дискретностью понимают:
 - нечто, изменяющееся между несколькими различными стабильными состояниями;
 - нечто, состоящее из отдельных частей, прерывистость, дробность. Например, дискретный спектр, дискретные структуры, дискретные сообщения.
- Математическая структура — название, объединяющее понятия, общей чертой которых является их применимость к множествам, природа которых не определена. Для определения самой структуры задают отношения, в которых находятся элементы этих множеств. Затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют неким условиям, которые являются аксиомами рассматриваемой структуры.

Разделы курса

- Множества и отношения
- Комбинаторика
- Булевы функции
- Графы и деревья
- Математическая логика
- Упорядоченные множества и решетки
- Вычислимость и алгоритмы
- Языки и автоматы

Множества

- Множество – *неупорядоченный* набор элементов. Нет строгого определения.
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Базовое свойство множеств:
 $a \in A$ или (исключающее) $a \notin A$
- Порядок элементов не важен
- Не важно сколько раз встречается один и тот же элемент

Примеры множеств

- $A = \emptyset$ - пустое множество $\{\}$
- $A = \{z\}$ $z \in A$, но $z \neq \{z\}$
- $A = \{\{b, c\}, \{c, x, d\}\}$ – множество множеств
- $A = \{\{x, y\}\}$
 $\{x, y\} \in A$, но $\{x, y\} \neq \{\{x, y\}\}$

Способы задания множества

- Перечислить все элементы
 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ или $\{0,1,2,\dots,9\}$
- Описать свойство, которое характеризует все элементы

$$\{x : x \text{ - целое и } 3 < x \leq 7\} = \{4,5,6,7\}$$

$$\{x : x \text{ — это месяц с 30 днями} \} =$$

$$\{\text{Апрель, Июнь, Сентябрь, Ноябрь}\}$$

$$\{x: x \text{ — это простое число}\} = \{2,3,5,7,11,13,17,\dots, 2^{82\,589\,933} - 1, \dots\}$$

Специальные множества

- $\mathbb{N}$ = множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ = множество всех целых чисел $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ = множество всех рациональных чисел
 $\{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. Например, $5/22$, $-2568/535$
- $\mathbb{R}$ = множество всех вещественных чисел. Например, 9.5656282 , -5.6723 , или $0.333333\dots$
- $\emptyset$ = пустое множество $\{\}$

Используйте специальные множества, чтобы описать свои множества:

$S = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 0\}$ означает, что $S = \{\} = \emptyset$

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 10 \text{ и } x \leq 20\} = \{11, 12, 13, \dots, 20\}$

Равенство множеств

- Определение 1: Множества равны тогда и только тогда, когда они содержат в точности одни и те же элементы. Примеры:
 $A = \{9, 2, 7, -3\}$, $B = \{7, 9, -3, 2\} : A=B$
- $A = \{\text{собака, кошка, лошадь}\}$,
- $B = \{\text{кошка, лошадь, кролик, собака}\} : A \neq B$
- $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ и } x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{2, -1\} : A = B$

Размер множества

- это кол-во элементов множества (интуитивное определение).
- Конечное множество – элементы множества могут быть сопоставлены подмножеству $N \{0,1,2,...,n\}$.
- Бесконечное множество – множество не являющееся конечным.

Мощность множества

- Если множество S содержит n *уникальных* элементов, то мощность S :

$$|S| = n$$

$$A = \{\text{Mercedes, BMW, Porsche}\}, |A| = 3$$

$$B = \{1, \{2, 3\}, \{4, 5\}, 6\}, |B| = ?$$

$$C = \emptyset, |C| = ?$$

$$D = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 7000\}, |D| = ?$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \geq 7000\}, |E| = ?$$

$$F = \{\emptyset\}, |F| = ?$$

$$G = \{1, 1, 1, 1, 1\}, |G| = ?$$

$$H = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, |H| = ?$$

$$I = \{\{0, 1, 2, 3, \dots\}\}, |I| = ?$$

Подмножества

- A подмножество B , обозначается $A \subseteq B$,
если каждый элемент A также является
элементом B
- A собственное подмножество B ,
обозначается $A \subset B$,
если $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Теорема 1

- $A \subseteq A$ для любого A
- $\emptyset \subseteq A$ для любого A

Примеры подмножеств

$A = \{1, 7, 9, 15\}$ и $B = \{7, 9\}$ возможные отношения подмножеств:

$$B \subseteq A, B \subset A$$

$$A \subseteq A, B \subseteq B$$

$$\emptyset \subseteq A, \emptyset \subseteq B, \emptyset \subset A, \emptyset \subset B$$

Example 3. Prove that the sets $A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$ and $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ satisfy $A \subseteq B$.

Solution. An arbitrary element of A is of the form 2^i for some $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$. An arbitrary element of B is of the form $2 \cdot j$ for some $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Clearly, $2^i = 2 \cdot j$ for the integer $j = 2^{i-1}$. Since an arbitrary element of A is an element of B , we conclude $A \subseteq B$. ■

Теорема 2

- $A=B$ тогда и только тогда когда $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$

$$A=B \Leftrightarrow B \subseteq A \text{ и } A \subseteq B$$

Доказательство:

$\Rightarrow$ Если $A=B$ то $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$

Предположим $A=B$, то $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$ согласно теореме 1

$\Leftarrow$ Если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то $A=B$,

Для любого x если $x \in B$, то $x \in A$ так как $B \subseteq A$ и

если $x \in A$, то $x \in B$ так как $A \subseteq B$, значит A и B состоят из одних и тех же элементов и согласно определению 1:

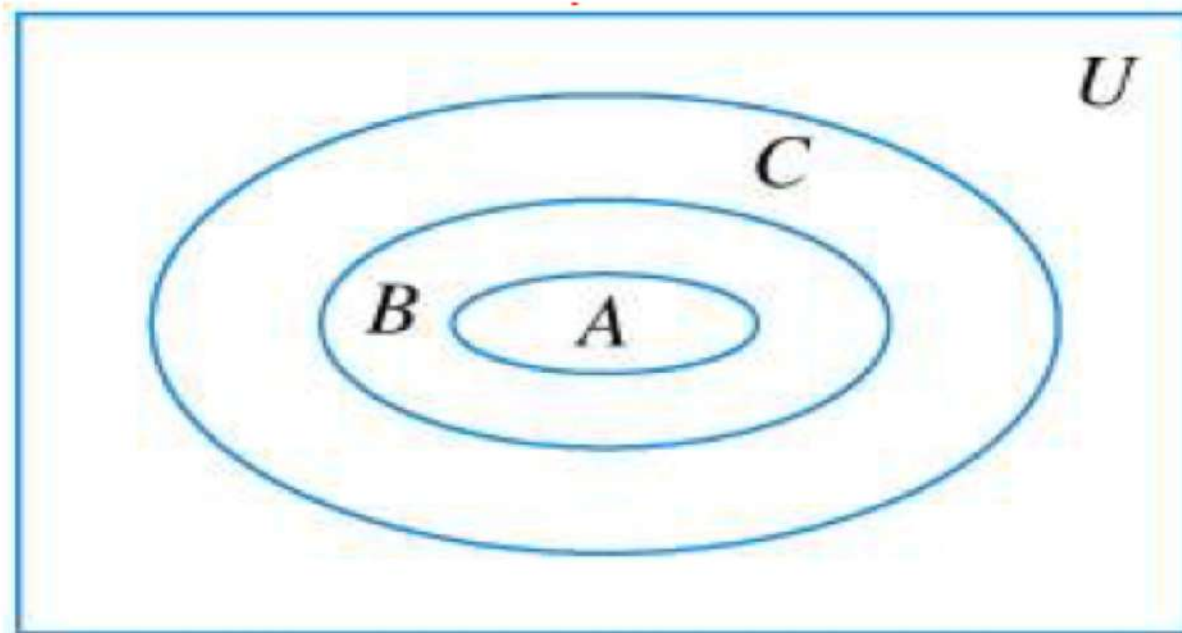
$$A=B$$

Правила

- $A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $\wedge$ - «и»
- $\Leftrightarrow$ - «тогда и только тогда»
- $\Rightarrow$ - «если ... то ...»
- $\vee$ - «или»

Диаграмма Венна

- U - универсальное множество – множество всех элементов *рассматриваемой задачи*
- $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$



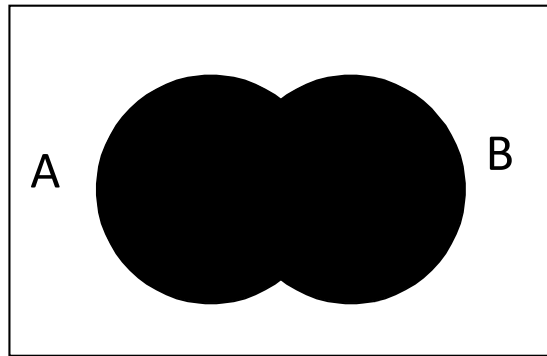
Операции над множествами

- Объединение $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
- $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
- Пересечение $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
- $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, $A \cap B = \{b\}$
- Мощность: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Операции над множествами (2)

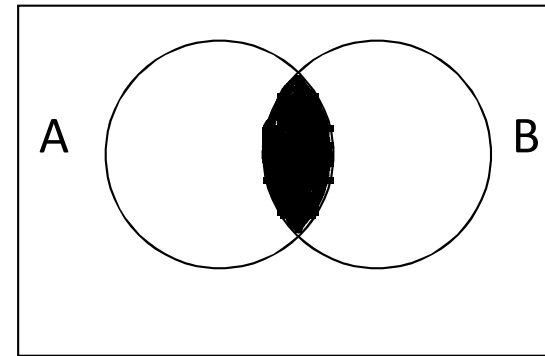
- Разность $A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
- $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$, $A - B = \{a\}$
- $B - A = ?$
- Дополнение $\bar{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$
- где U – универсальное множество
 $U = \mathbb{N}$, $B = \{250, 251, 252, \dots\}$
- $\bar{B} = \{0, 1, 2, \dots, 248, 249\}$
- $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

Диаграммы Венна

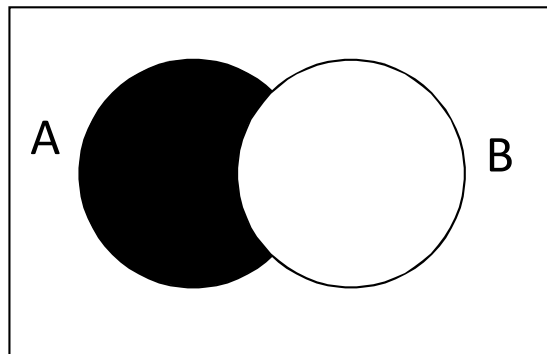
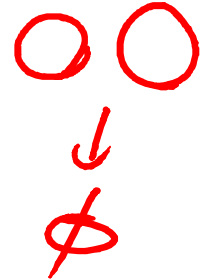


Union $A \cup B$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

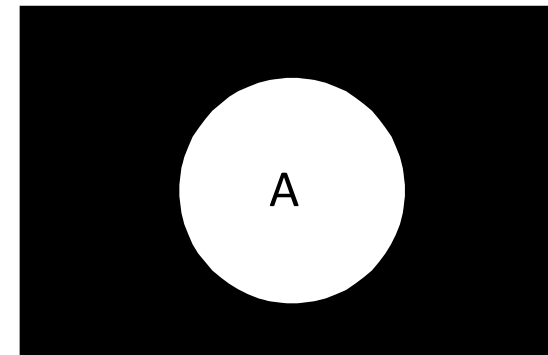


Intersection $A \cap B$



Difference $A - B$

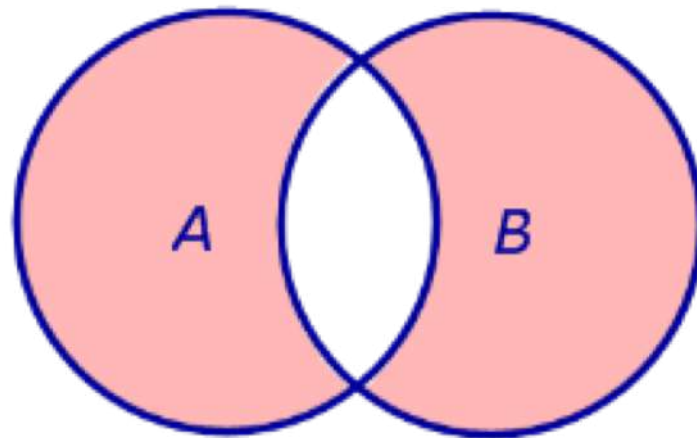
$$|A - B| = |A| - |AB|$$



Complement A'

Симметрическая разность

$$A \Delta B = A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$



Мощность?

Свойства операций

- Идентичность $A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$
- Доминирование $A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset$
- Идемпотентность $A \cup A = A, A \cap A = A$
- Дополнительность $\overline{\overline{A}} = A$
- Коммутативность $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Theorem 4. Let A , B , and C be sets. Then:

- Прочие свойства:
 - (a) If $A \subseteq B$ or $A \subseteq C$, then $A \subseteq B \cup C$.
 - (b) If $B \subseteq A$ and $C \subseteq A$, then $B \cup C \subseteq A$.
 - (c) If $A \subseteq B$ and $A \subseteq C$, then $A \subseteq B \cap C$.
 - (d) If $B \subseteq A$ or $C \subseteq A$, then $B \cap C \subseteq A$.
- $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B,$
 $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$

Доказательство коммутативности

$$A \cup B = B \cup A$$

$$1) A \cup B \subseteq B \cup A$$

$$2) B \cup A \subseteq A \cup B$$

Докажем 1: пусть $x \in A \cup B$, тогда $x \in A$ или $x \in B$. Рассмотрим оба случая: 1.1. Если $x \in A$, то $x \in B \cup A$, 1.2. Если $x \in B$, то $x \in B \cup A$.

2. Доказывается аналогично.

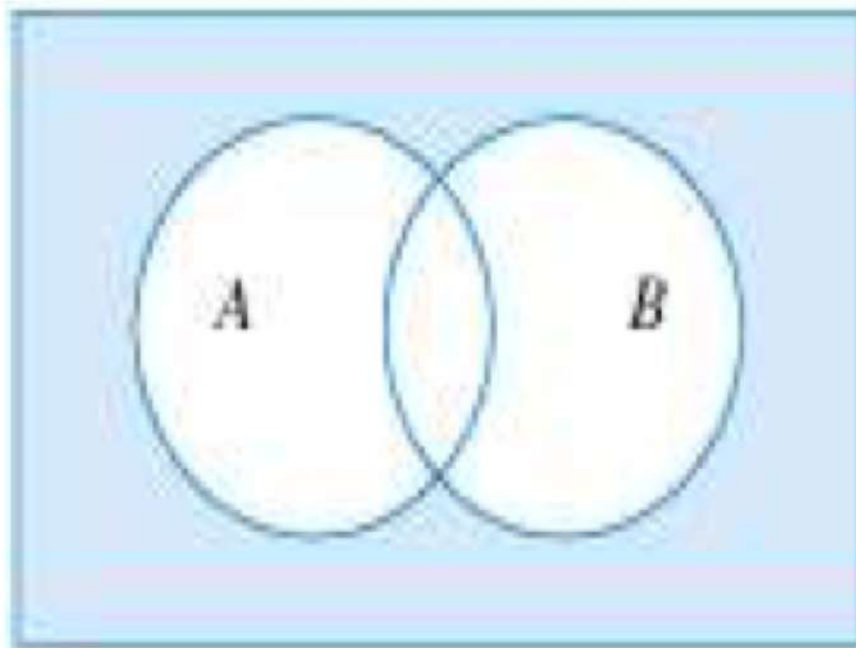
Свойства операций (2)

- Дистрибутивность

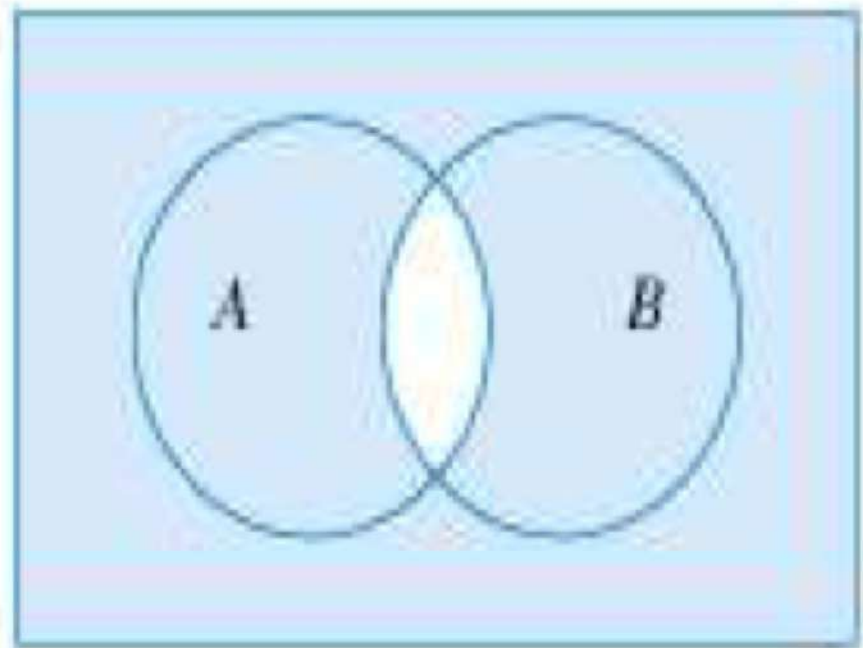
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Законы ДеМоргана



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Свойства операций (3)

- Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

- Закон дополнения $A \cap \bar{A} = \emptyset$

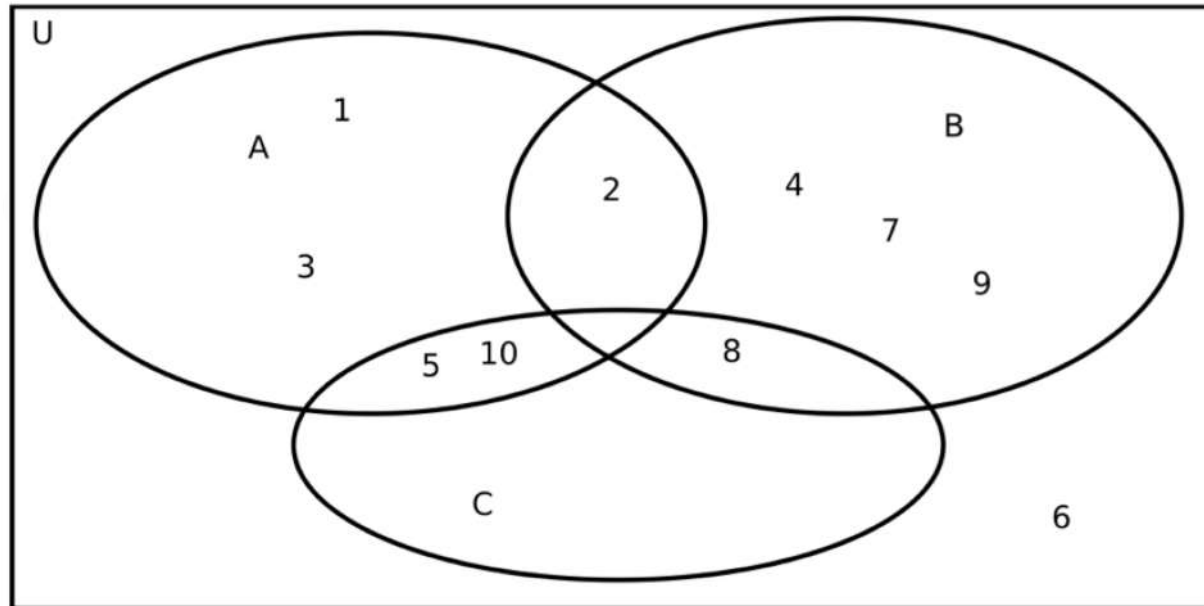
$$A \cup \bar{A} = U$$

Приоритет операций

1. Унарные операции (дополнение)
2. Пересечения
3. Объединения и разности имеют одинаковый приоритет

Примеры задач

- Дано: $A = \{1, 2, 3, 5, 10\}$, $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$
 $C = \{5, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



$$A \cap B \cap C =$$

$$A \cap B =$$

$$B \cap C =$$

$$A \cap C =$$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$
- $A - C = \{1, 2, 3\}$
- $\overline{B} \cap (A \cup C) = \{1, 3, 5, 6, 10\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10\} = \{1, 3, 5, 10\}$
- $B \oplus C = \{2, 4, 7, 9\} \cup \{5, 10\} = \{2, 4, 5, 7, 9, 10\}$

Характеристическая функция

Индикатор, или характеристическая функция, или индикаторная функция, или функция принадлежности подмножества $A \subseteq X$ — это функция, определённая на множестве X , которая указывает на принадлежность элемента $x \in X$ подмножеству A .

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cap B} &= \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \\ \mathbf{1}_{A \cup B} &= \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \\ \mathbf{1}_{A \Delta B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2(\mathbf{1}_{A \cap B}), \\ \mathbf{1}_{A^c} &= 1 - \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

Для самостоятельной работы: Мягкие вычисления. Нечеткие множества. Функция принадлежности.

Представление множеств на ЭВМ

- Битовое представление
- Хэш функции (python)

$a \in \{0, 1, \dots, 1000000000\}$

Кортеж

- Кортеж (вектор) – упорядоченный набор элементов
- Элементы вектора – это координаты
- Длина или размерность вектора – число координат
- Значения координат могут совпадать
- Пример: (5,4,5,0)

Кортеж(2)

- Кортежи длины 2 часто называются парами (упорядоченными парами)
- Два кортежа равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие координаты их равны.
- $(a_1, \dots, a_m) = (b_1, \dots, b_n)$,
- если $m = n$
- и $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_m$

Декартово произведение

- Декартово произведение (прямое произведение) множеств A и B (обозначение $A \times B$) называется *множеством* всех пар (a, b) , таких, что $a \in A, b \in B$.
- $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\},$
 $A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$
- Коммутативность?
- Если $A = B$, то обе координаты принадлежат A . Обозначается A^2

Декартово произведение

- Декартово произведение множеств $A_1, \dots, A_n$ (обозначение $A_1 \times \dots \times A_n$) называется множеством всех векторов $(a_1, \dots, a_n)$ длины n , таких, что $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$.
- $A_1 = \{a, b, c\}, A_2 = \{d, e\}, A_3 = \{1, 2\}$
 $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a, d, 1), (a, d, 2), (a, e, 1), (a, e, 2),$
 $(b, d, 1), (b, d, 2), (b, e, 1), (b, e, 2),$
 $(c, d, 1), (c, d, 2), (c, e, 1), (c, e, 2)\}$
- $A \times \dots \times A$ обозначается A^n

Мощность декартового произведения

- Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества и $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$. Тогда мощность множества $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ равна произведению мощностей $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = m_1 m_2 \dots m_n.$$

- $A_1 = \{a, b, c\}, A_2 = \{d, e\}, A_3 = \{1, 2\}$

$$|A_1 \times A_2 \times A_3| = 3 * 2 * 2 = 12$$

- Следствие. $|A^n| = |A|^n$

Отношения

- Подмножество R декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется n -арным (или n -местным) отношением.

В некоторых источниках – это **соответствие**, а отношение – это подмножество A^N .

- Говорят, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся в отношении R , если $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$.
- Пусть, например, V — множество точек плоскости, а L — множество прямых этой плоскости. Отношение R_{VL} «прямые l_i, l_j пересекаются в точке v_k » — трехместное отношение, определенное на множестве $L \times L \times V$. Оно является множеством всех троек (l_i, l_j, v_k) , таких, что l_i, l_j пересекаются в точке v_k .

Отношения

- Подмножество $R \subseteq M^n$ называется n -местным отношением на множестве M .
- Одноместное отношение — это просто подмножество M . Такие отношения называют признаками: a обладает признаком R , если $a \in R$ и $R \subseteq M$
- Наиболее часто встречающимися и хорошо изученными являются двухместные, или бинарные, отношения.

Примеры бинарных отношений

- Отношения на $\mathbb{N}$:
 - 1) отношение $\leq$ выполняется для пар (7, 9) и (7, 7), но не выполняется для пары (9, 7);
 - 2) отношение «иметь общий делитель, отличный от единицы» выполняется для пар (6, 9), (4, 2), (2, 4), (4, 4), но не выполняется для пар (7, 9) и (9, 7).
- Отношения на множестве людей: «жить в одном городе»; «быть моложе»; «быть сыном»; «быть знакомым».

Способы задания отношений

- Любые способы задания множеств
- Матрица бинарного отношения.

На множестве $M = \{a_1, \dots, a_m\}$ — это квадратная матрица C порядка m , в которой элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i a_j) \in R \\ 0, (a_i a_j) \notin R \end{cases}$$

Примеры матричного способа задания отношений

На множестве $M=\{1,2,3,4,5,6\}$

а) отношение $\leq$;

б) отношение «иметь общий делитель, отличный от единицы».

а

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

б

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

Обратное отношение

Пусть R отношение, тогда

$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$ – обратное отношение

Примеры:

- Родитель⁻¹ = Ребенок
- $(>)^{-1} = (<)$

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

Если $S \subseteq R$, то $S^{-1} \subseteq R^{-1}$

Композиция отношений

Пусть R и S – отношения на множестве X^2 , тогда их композиция:

$$R \circ S = \{(x, y) \in X^2 : \exists z \in X, (x, z) \in S \ \& \ (z, y) \in R\}$$

Дед/Бабушка – это композиция Родитель $\circ$ Родитель

$$\text{Id}_X = \{(x, y) : x = y\}$$

$$R = R \circ \text{Id}_X = \text{Id}_X \circ R$$

Свойства бинарных отношений

- Рефлексивность $\forall x \in X \quad xRx$

Главная диагональ матрицы содержит только единицы

- Антирефлексивность $\forall x \in X \quad \neg xRx$

Главная диагональ матрицы содержит только нули.

Отношения $\leq$ и «иметь общий делитель» рефлексивны, отношения $<$ и «быть сыном» антирефлексивны.

- Симметричность $\forall x, y \in X \quad xRy \rightarrow yRx$

Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали: $c_{ij} = c_{ji}$ для любых i и j .

Свойства бинарных отношений

- Антисимметричность $\forall x, y \in X \quad (xRy \wedge yRx) \rightarrow x=y$

Пример антисимметричного отношения — отношение $\leq$: действительно, если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$

- Асимметричность $\forall x, y \in X \quad xRy \rightarrow \neg yRx$
- Транзитивность $\forall x, y, z \in X \quad xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$
- Антитранзитивность

$$\forall x, y, z \in X \quad xRy \wedge yRz \rightarrow \neg xRz$$

- Связность (слабая связность)

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx$$

Виды отношений

- Эквивалентные — это рефлексивные, симметричные, транзитивные

Отношение равенства E на любом множестве является отношением эквивалентности.

- Частичного порядка - это рефлексивные, антисимметричные, транзитивные
- Строго порядка - это антирефлексивные, антисимметричные, транзитивные
- Линейного порядка — это связное отношение частичного порядка

Отношения $\leq$ и $\geq$ для чисел являются отношениями нестрогого порядка, отношения $<$ и $>$ — отношениями строгого порядка. Оба отношения линейно упорядочивают множества N и R .

- Доминирования — антирефлексивные, антисимметричное

Проверка свойств

- Является ли отношение {рефлексивным | транзитивным |}?
- Обязательно нужно доказательство ответа
- Обычно проще доказать ответ «Нет»: Найти одну пару x, y для которых условие свойства не выполняется
- Если ответ «Да», то нужно проверить для всех пар x, y убедиться в выполнении свойства

Булеан множества

- Булеан множества S обозначается $\mathcal{P}(S)$ – это множество которое содержит все подмножества множества S .
- Иногда обозначают: 2^S
- $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ и $S \in \mathcal{P}(S)$ - всегда выполняются
- Примеры: $S = \{1, 2, 3\}$
- $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $|\mathcal{P}(S)| = 8$
- $A = \emptyset$
 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$, $|A| = 0$, $|\mathcal{P}(A)| = 1$

Принцип математической индукции (слабая форма)

Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$,

Тогда

Если $t_0 \in \mathcal{T}$ (база индукции)

и (если $t_k \in \mathcal{T}$ то $t_{k+1} \in \mathcal{T}$) (шаг индукции)

то $\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{N} : x \geq t_0\}$ (индукционный вывод)

Доказать $(0+1+2+\dots+n) = n(n+1)/2$

Доказать $n+1 < n^2$ для $n > 1$

Доказательство $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Лемма 1.

Пусть X – произвольное множество и пусть $b \notin X$.

Если $|\mathcal{P}(X)| = n$, то $|\mathcal{P}(X \cup \{b\})| = 2n$

Доказательство:

Перечислим все подмножества X :

$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

Они же будут подмножествами $X \cup \{b\}$.

Еще подмножествами $X \cup \{b\}$ будут: $S_i \cup \{b\}$ $i=1..n$

В результате мы получили $2n$ подмножеств

причем ни одно из них не входит в список дважды и каждое подмножество $X \cup \{b\}$ входит в этот список.

Функция – частный случай отношения

- Если рассматривать отношение F на упорядоченных парах (x, y) , где $x \in M$, а $y \in L$, и если для каждого элемента $x \in M$ существует *единственный* элемент $y \in L$, определяемый отношением F , то отношение этого вида также называют *функцией* или отображением и записывают в виде:
 $F: M \rightarrow L$ – отображение множества M в L .
- Здесь M называют областью определения функции F , а L – областью значений. Элемент множества L , который соответствует элементу $x \in M$, обозначается $F(x)$ и называется образом элемента x . Сам элемент x называют прообразом элемента $F(x)$

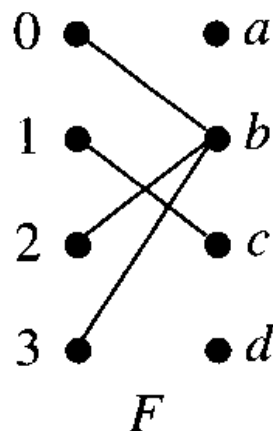
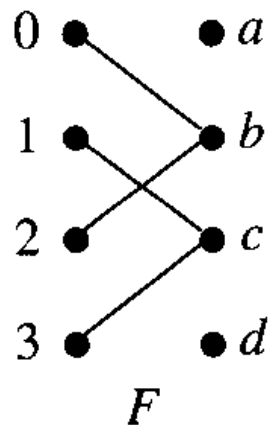
Поведение функций

- Сюръективность. Функция f называется сюръективной, если каждому элементу множества Y может быть сопоставлен хотя бы один элемент множества X . То есть, функция f сюръективна, если образ множества X при отображении совпадает с множеством Y . Другими словами, при сюръекции не бывает так, чтобы какой-то элемент Y не имел прообраза.
- Инъективность. Функция f называется инъективной, если любым двум разным элементам из множества X сопоставляются разные элементы из множества Y . Более формально, функция f инъективна, если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ таких, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует, что $x_1 = x_2$. Другими словами, при инъекции не бывает так, чтобы два или больше разных элементов из множества X отображались в один и тот же элемент из Y .
- Биективность. Если функция является и сюръективной, и инъективной, то такую функцию называют биективной или взаимно однозначной.

Функция k в 1

- Пусть $F: X \rightarrow Y$ - функция, и пусть $k \in \mathbb{N}$.
Функция F называется функцией **k в 1** . Если для каждого $y \in Y$, существует не более k различных элементов:

$$\forall y \in Y \quad |\{x \in X: F(x)=y\}| \leq k$$



Теорема 1

- Пусть: $F: X \rightarrow Y$ - функция **k в 1**, $|Y|=n$, тогда X – конечно, причем $|X| \leq kn$

Принцип Дирихле

- Если m кроликов нужно разместить в n клетках, причем $m > n$, то по крайней мере 2 кролика окажутся в одной клетке.
- Теорема 2. (Обобщенный принцип Дирихле).
- Пусть $F: X \rightarrow Y$. И пусть, $|X|=m$, $|Y|=n$, тогда существует такой $y \in Y$, что

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$$

Обобщенный принцип Дирихле

- Доказательство (от противного):
- Пусть ни один элемент y не является образом более чем $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1$ элементов X , тогда общее число элементов X не превышает:
- $m \leq n \left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 \right) < n \left(\frac{m}{n} + 1 - 1 \right) = m$
- $m < m$ - противоречие

Принцип Дирихле

- $f: X \rightarrow Y$. $|X| > |Y|$, тогда существует такой $y \in Y$, который является образом по крайней мере двух элементов X .
- Доказательство:
- $|X|=m$, $|Y|=n$, $m \geq n + 1$
- $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n+1}{n} \right\rceil \geq 2$

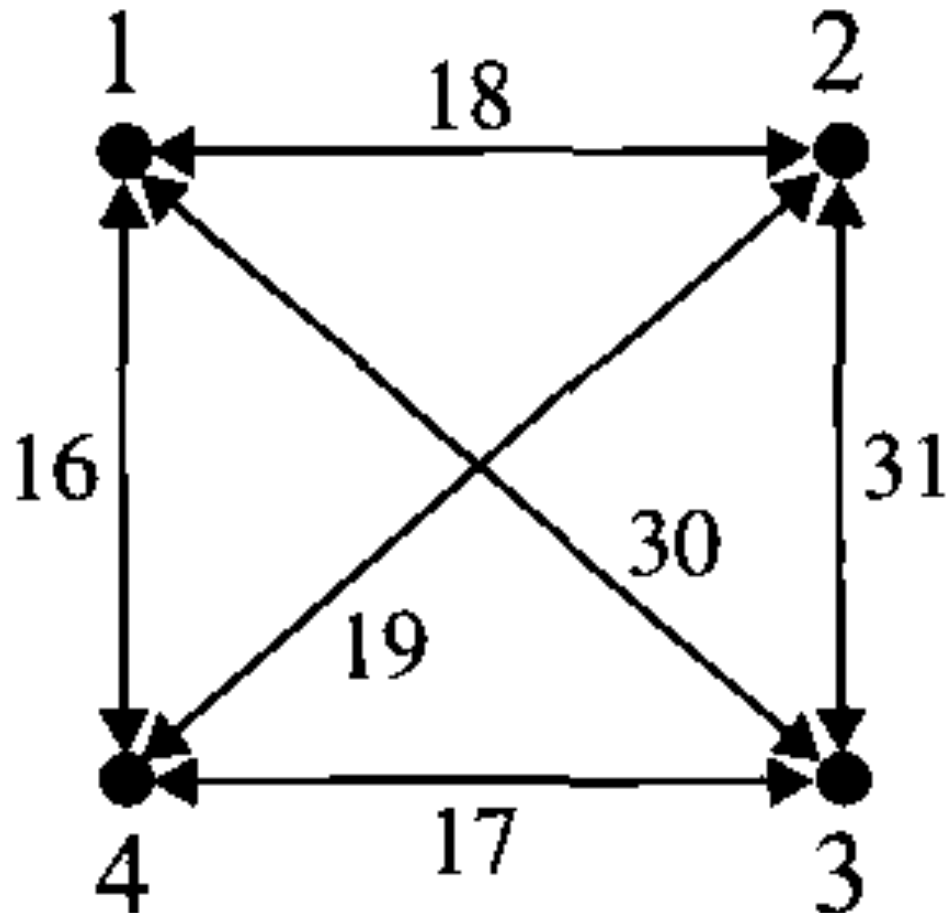
Принцип включения/исключения

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – конечные множества ($n \geq 1$). Тогда $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ равно сумме мощностей всех нечетных пересечений за вычетом мощностей всех четных пересечений.

Подсчет комбинаций в TSP



1-2-3-4-1
1-2-4-3-1
1-3-2-4-1
1-4-3-2-1
1-3-4-2-1
1-4-2-3-1

Подсчет комбинаций в TSP(2)

$$1-2-3-4-1 : 18 + 31 + 17 + 16 = 82$$

$$1-2-4-3-1 : 18 + 19 + 17 + 30 = 84$$

$$1-3-2-4-1 : 30 + 31 + 19 + 16 = 96$$

$$1-4-3-2-1 : 16 + 17 + 31 + 18 = 82$$

$$1-3-4-2-1 : 30 + 17 + 19 + 18 = 84$$

$$1-4-2-3-1 : 16 + 19 + 31 + 30 = 96$$

Оптимальное значение: 82

Число вариантов из заданной вершины $(n-1)!$

Принцип умножения

- Пусть $t \in \mathbb{N}$, если процедура выбора состоит из t последовательных шагов, причем на i -м шаге есть n_i возможностей, то общее число всех возможностей выбора равно

$$\prod_{i=1}^t n_i$$

Мощность булеана

- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- Представьте, что у каждого элемента A есть переключатель “вкл/выкл”. Каждая конфигурация переключателей A соответствует одному подмножеству A , которое является элементом $\mathcal{P}(A)$.
Например, $A = \{x, y, z\}$:

A	1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x	x	x	x	x	x
y	y	y	y	y	y	y	y	y
z	z	z	z	z	z	z	z	z

Принцип сложения

- Если имеется набор m непересекающихся множеств, в i -м множестве n_i элементов, то число всех возможностей сделать выбор:

$$\sum_{i=1}^m n_i$$

Перестановки

- r -перестановкой n -элементного множества называется линейно упорядоченный набор r элементов этого множества. $n \geq r \geq 0$
- $P(n, r)$ – число таких перестановок
- $P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

$$\begin{aligned} P(n, r) &= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \dots 1}{(n-r)(n-r-1) \dots 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Сочетания

- Неупорядоченный набор из r элементов выбранный из n -элементного множества называется сочетанием. $n \geq r \geq 0$
- $C(n, r)$ – число сочетаний

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$

Доказательство:

$$P(n, r) = C(n, r)P(r, r)$$

Перестановки с повторениями

- Слово: абракадабра. Сколькими способами мы можем выбрать 5 позиций из 11 для буквы а, далее сколькими способами мы можем выбрать 2 из 6 позиций для буквы б, и т.д.
- Пусть $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ – различные символы. Пусть в некоторый набор входит r_i экземпляров m_i , причем $\sum_{i=1}^k r_i = n$.
- Число перестановок с повторениями:

$$\begin{aligned} &P(n; r_1, r_2, \dots, r_k) \\ &= C(n, r_1) C(n - r_1, r_2) \dots C(n - r_1 - r_2 - \dots - r_{k-1}, r_k) \\ &= \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} \end{aligned}$$

Сочетания с повторениями

- Как разделить 10 шариков между 3 малышами
- шшш | шшшшш | шшш
- $C(10+2, 2)$
- Теорема. Число разбиений n одинаковых объектов на k наборов ($n \geq r > 0$):

$$C(n+k-1, k-1)$$

Комбинаторные тождества

Тождество Ньютона:

$$C(n, k)C(k, m) = C(n, m)C(n - m, k - m)$$

Следствие:

$$C(n, k) = \frac{n}{k} C(n - 1, k - 1)$$

Тождество Паскаля:

Пусть $n \geq k \geq 1$

$$C(n, k) = C(n - 1, k) + C(n - 1, k - 1)$$

Бином Ньютона

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) \\ &= xxx + 3xxy + 3xyy + yyy\end{aligned}$$

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^n y^n$$

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i$$

Теорема 1:

$$2^n = \sum_{i=0}^n C_n^i$$

Теорема 2:

$$\sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^i = 0$$

Треугольник Паскаля

1				
$C(0, 0)$				
1		1		
$C(1, 0)$		$C(1, 1)$		
1	2		1	
$C(2, 0)$	$C(2, 1)$		$C(2, 2)$	
1	3	3		1
$C(3, 0)$	$C(3, 1)$	$C(3, 2)$		$C(3, 3)$
1	4	6	4	1
$C(4, 0)$	$C(4, 1)$	$C(4, 2)$	$C(4, 3)$	$C(4, 4)$

Theorem 8. Let $n \geq r \geq 0$. Then,

Row Sum : $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$.

Column Sum : $C(r, r) + C(r + 1, r) + \dots + C(n, r) = C(n + 1, r + 1)$.

Diagonal Sum : $C(n, 0) + C(n + 1, 1) + \dots + C(n + r, r) = C(n + r + 1, r)$

Row 0	1				
	$C(0, 0)$				
Row 1	1	1			
	$C(1, 0)$	$C(1, 1)$			
Row 2	1	2	1		
	$C(2, 0)$	$C(2, 1)$	$C(2, 2)$		
Row 3	1	3	3	1	
	$C(3, 0)$	$C(3, 1)$	$C(3, 2)$	$C(3, 3)$	
Row 4	1	4	6	4	1
	$C(4, 0)$	$C(4, 1)$	$C(4, 2)$	$C(4, 3)$	$C(4, 4)$

Column 0					
	1				
	$C(0, 0)$				
	1	1			
	$C(1, 0)$	$C(1, 1)$			
	1	2	1		
	$C(2, 0)$	$C(2, 1)$	$C(2, 2)$		
	1	3	3	1	
	$C(3, 0)$	$C(3, 1)$	$C(3, 2)$	$C(3, 3)$	
	1	4	6	4	1
	$C(4, 0)$	$C(4, 1)$	$C(4, 2)$	$C(4, 3)$	$C(4, 4)$

Diagonal 0	1				
	$C(0, 0)$				
Diagonal 1	1	1			
	$C(1, 0)$	$C(1, 1)$			
Diagonal 2	1	2	1		
	$C(2, 0)$	$C(2, 1)$	$C(2, 2)$		
Diagonal 3	1	3	3	1	
	$C(3, 0)$	$C(3, 1)$	$C(3, 2)$	$C(3, 3)$	
Diagonal 4	1	4	6	4	1
	$C(4, 0)$	$C(4, 1)$	$C(4, 2)$	$C(4, 3)$	$C(4, 4)$

Суммы степеней

$$(a) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

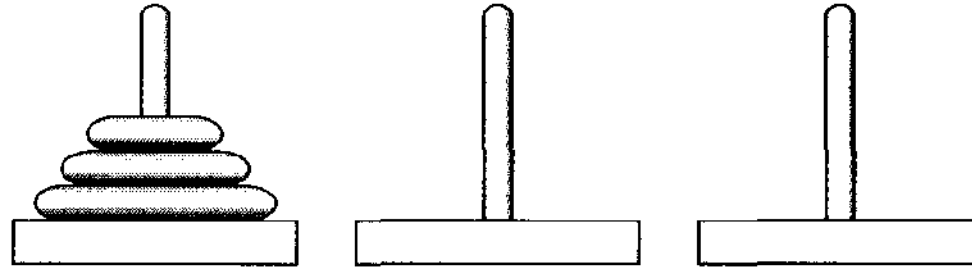
$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n C(k, 1) = C(n + 1, 2) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$(b) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$$

$$k^2 = k(k - 1) + k \qquad C(k, 2) = \frac{k!}{(k - 2)! 2!} = \frac{k(k - 1)}{2}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \sum_{k=2}^n 2C(k, 2) + \sum_{k=1}^n C(k, 1) = C(n + 1, 3) + C(n + 1, 2) = \\ &= \frac{(2n + 1)n(n + 1)}{6} \end{aligned}$$

Задача о ханойской башне



```
def tower_of_hanoi(k, from_, to_, temp_):  
    if k == 0: return  
    tower_of_hanoi(k-1, from_, temp_, to_)  
    print(f"move ring from {from_} to {to_}")  
    tower_of_hanoi(k-1, temp_, to_, from_)
```

```
tower_of_hanoi(3, 1, 3, 2)
```

Число ходов

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n-1) + 1 & \text{for } n > 1 \\ 1 & \text{for } n = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2(2T(n-2) + 1) + 1 =$$

$$4T(n-2) + 2 + 1 = 8T(n-3) + 4 + 2 + 1 =$$

$$2^3T(n-3) + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$T(n) = 2^iT(n-i) + 2^{i-1} + 2^{i-2} + \dots + 2 + 1$$

$$T(n) = 2^{n-1}T(1) + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1$$

$$T(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1$$

Число ходов

$$T(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1$$

$$2 T(n) = 2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n$$

-

$$T(n) = 1 + 2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

$$T(n) = 2^n - 1$$

Рекуррентное соотношение первого порядка

$$T(n) = \begin{cases} cT(n-1) + f(n), & n > k \\ f(k), & n = k \end{cases}$$

Теорема:

$$T(n) = \sum_{l=k}^n c^{n-l} f(l)$$

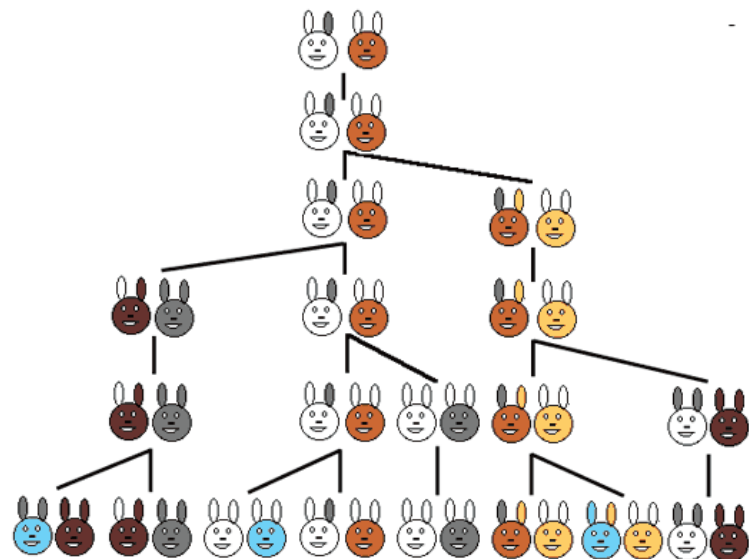
Теорема: Если

$$T(n) = \begin{cases} cT(n-1) + d, & n > 0 \\ d, & n = 0 \end{cases}$$

то

$$T(n) = d \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}$$

Числа Фибоначчи



1

1

2

3

5

8

$$F_0=1$$

$$F_1=1$$

$$F_2=F_0+F_1$$

...

$$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$$

Рекуррентное соотношение второго порядка

$$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$$

$$a_n - k_1 a_{n-1} - k_2 a_{n-2} = 0$$

Если $k_1 = k_2 = 1$

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

Предположим, что $a_n = c^n$

$$c^n - c^{n-1} - c^{n-2} = 0 \quad c^{n-2} (c^2 - c - 1) = 0$$

$c^{n-2} = 0$ – решение тривиально

$$c^2 - c - 1 = 0, \text{ тогда корни: } c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Решение рекуррентного соотношения второго порядка

Общее решение $a_n = Ac_1^n + Bc_2^n$

Частное решение – это когда A и B принимают конкретные значения

Для Фибоначчи: $F_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$

$$F_0 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = 1 \quad A + B = 1$$

$$F_1 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \quad A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad B = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Решение рекуррентного соотношения

- Если корни равны $c_1=c_2=c$
- Тогда решение:
- $a_n = Ac^n + Bnc^n$

Производящие функции

- $G(z) = g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots + g_nz^n + \dots$ —
называется производящей функцией для
последовательности $\langle g_0, g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$.
- z — объект произвольной природы

Задача Эйлера

В 50-х годах XVIII века Эйлер решал следующую задачу: *какие грузы можно взвесить с помощью гирь в $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ грамм и сколькими способами?*

Эйлер рассматривает произведение

$$G(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\dots$$

которое после раскрытия скобок представляется в виде бесконечного ряда

$$G(z) = 1 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 + \dots$$

Каждый g_k — это коэффициент при z^k , а z^k — получается как произведение каких-то z^{2^m} , то есть g_k — это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых из чисел $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^m, \dots$. Другими словами g_k — это число способов взвешивания груза в k грамм заданными гирями.

Как найти g_k ?

Задача Эйлера (2)

Эйлер пишет очевидные тождества:

$$(1-z)(1+z) = 1-z^2$$

$$(1-z^2)(1+z^2) = 1-z^4$$

$$(1-z^4)(1+z^4) = 1-z^8$$

Перемножим и сократим их:

$$(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\dots=1$$

$$(1-z) G(z) = 1$$

$$G(z)=1/(1-z)$$

Задача Эйлера (3)

- $G(z)=1/(1-z)$, если $|z|<1$, это геометрическая прогрессия, то
- $G(z) = 1/(1-z) = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \dots$
- Если сравнить с $G(z) = 1 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 + \dots$
- То видно, что $g_k=1$, значит каждый груз ровно в k грамм можно взвесить с помощью гирь в $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ грамм ровно одним способом!

Ряды и действия

$$\alpha(z) + \beta(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + \dots$$

$$\dots + (a_n + b_n)z^n + \dots,$$

$$\begin{aligned} \alpha(z) \cdot \beta(z) = & a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)z + \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$$1 = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

$$z = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

$$\begin{aligned} (1 - z)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = \\ = 1 + 0 \cdot z + 0 z^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot a_0 = 1, \quad a_1 - a_0 = 0, \\ a_2 - a_1 = 0, \dots, a_n - a_{n-1} = 0, \dots, \end{aligned}$$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 1$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$$

Теорема 1

Обозначим $C(n, m) = C_n^m = \binom{n}{m}$

$$\frac{1}{(1-ax)^m} = 1 + \binom{m}{1} ax + \binom{m+1}{2} a^2 x^2 + + \\ + \binom{m+2}{3} a^3 x^3 + \dots + \binom{m+n-1}{n} a^n x^n + \dots$$

Пример

Найти разложение:

$$\frac{15x}{1 + 3x - 4x^2} = \frac{15x}{(1 + 4x)(1 - x)} = \frac{a}{(1 + 4x)} + \frac{b}{(1 - x)}$$

$$15x = a(1 - x) + b(1 + 4x)$$

$$15 \cdot 1 = a(1 - 1) + b(1 + 4 \cdot 1)$$

$$15 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = a\left(1 + \frac{1}{4}\right) + b\left(1 - 4 \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$b = 3, a = -3$$

$$\frac{-3}{(1 + 4x)} + \frac{3}{(1 - x)} =$$

$$= -3(1 + (-4)x + (-4)^2x^2 + (-4)^3x^3 + \dots + (-4)^n x^n + \dots) + 3(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots)$$

$$= 0 + 15x - 45x^2 + \dots + 3(1 - (-4)^n)x^n + \dots).$$

Теорема 2

При любом $n \geq 0$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Доказательство

$$\begin{aligned} & (1 - x^{n+1}) \frac{1}{1-x} \\ &= (1 - x^{n+1})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) \\ &\quad - (x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \dots) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \end{aligned}$$

Применение производящих функций для рекуррентных соотношений

$$a_n = 3a_{n-1}$$
$$a_n - 3a_{n-1} = 0$$

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$. (1)

Умножим ЛЧ и ПЧ на $3x$

$$3xf(x) = 3a_0x + 3a_1x^2 + 3a_2x^3 + 3a_3x^4 + \dots + 3a_nx^{n+1} + \dots$$

$$f(x) - 3xf(x) = a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1)x^2 + (a_3 - 3a_2)x^3 + (a_4 - 3a_3)x^4 + \dots + (a_n - 3a_{n-1})x^{n+1} + \dots$$

Но $a_n - 3a_{n-1} = 0$, для всех n

Поэтому $f(x) - 3xf(x) = a_0$

$$f(x) = \frac{a_0}{(1 - 3x)} = a_0(1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \dots + 3^nx^n + \dots)$$

Сравнивая с (1) видим: $a_n = 3^n a_0$

Пример 2

$$a_0 = 5; a_k = a_{k-1} + 3$$

$$a_k - a_{k-1} - 3 = 0$$

$$\text{Пусть } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

$$xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots + a_nx^{n+1} + \dots$$

$$\frac{3}{1-x} = 3(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots)$$

$$f(x) - xf(x) - \frac{3}{1-x} = (a_0 - 3) + (a_1 - a_0 - 3)x + (a_2 - a_1 - 3)x^2 +$$

$$+ (a_3 - a_2 - 3)x^3 + (a_4 - a_3 - 3)x^4 + \dots + (a_n - a_{n-1} - 3)x^{n+1} + \dots$$

Но $a_n - a_{n-1} - 3 = 0$, для всех n

$$\text{Поэтому } f(x) - xf(x) - \frac{3}{1-x} = a_0 - 3 = 2$$

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} = 3(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots) +$$

$$2(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) = 5 + 8x + 11x^2 + 14x^3 + \dots + (3n + 5)x^n + \dots$$

Сравнивая с (1) видим: $a_n = 3n + 5$

Пример 3

$$a_0 = 2; a_1 = 4; a_k = a_{k-1} + 6a_{k-2};$$

$$a_k - a_{k-1} - 6a_{k-2} = 0$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots + a_nx^{n+1} + \dots$$

$$6x^2f(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + 6a_3x^5 + \dots + 6a_nx^{n+2} + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - 6x^2f(x) = & a_0 + (a_1 - a_0)x + \\ & (a_2 - a_1 - 6a_0)x^2 + \dots + \\ & + (a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2})x^n \end{aligned}$$

Пример 3

$$f(x) - xf(x) - 6x^2f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1 + 3x$$

$$f(x) = \frac{1 + 3x}{1 - x - 6x^2} = \frac{1 + 3x}{(1 - 3x)(1 + 2x)}$$
$$\frac{1 + 3x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{a}{(1 - 3x)} + \frac{b}{(1 + 2x)}$$
$$1 + 3x = a(1 + 2x) + b(1 - 3x)$$

$$a=6/5, b=-1/5$$

Пример 3

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5} \left(\frac{6}{1-3x} - \frac{1}{1+2x} \right) = \\ &= \frac{6}{5} (1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \dots + 3^n x^n + \\ &\dots) - \frac{1}{5} (1 + (-2)x + (-2)^2x^2 + (-2)^3x^3 + \\ &\dots + (-2)^n x^n + \dots) \\ a_n &= \frac{1}{5} (6 \cdot 3^n - (-2)^n) \end{aligned}$$

Функция алгебры логики

- Булева функция или логическая функция, или функция алгебры логики (ФАЛ) от n аргументов — это отображение $B^n \rightarrow B$, где $B = \{0, 1\}$. Элементы булева множества $\{1, 0\}$ обычно интерпретируют как логические значения «истинно» и «ложно».
- Обозначается $f(x_1, \dots, x_n)$

Таблица истинности

j	0	1	...	2^n
x_1	0	0		1
x_2	0	0		1
...				
x_n	0	1		1
$f(x_1, \dots, x_n)$	1	1		0

- Последняя строка – изображающее число
- Каждый столбец получается из предыдущего прибавлением 1 в *последнем (n-м) разряде*
- j – номер набора

T_0 – множество наборов где $f(x_1, \dots, x_n)=0$,

T_1 – множество наборов где $f(x_1, \dots, x_n)=1$

Функции 0 и 1 аргумента

- $f=1, f=0$
- $f(x)$

x	0	1
$f(x)=0$	0	0
$f(x)=x$	0	1
$f(x)=\neg x$	1	0
$f(x)=1$	1	1

- Сколько функций n аргументов?
 2^{2^n}

Бинарные функции

x	0	0	1	1	
y	0	1	0	1	
$f(x,y)=0$	0	0	0	0	тождественный ноль
$f(x,y)=x \wedge y$	0	0	0	1	конъюнкция , логическое И, and, &, *
$f(x,y)=\neg (x \rightarrow y)$	0	0	1	0	отрицание импликации, функция запрета, Δ
$f(x,y)=x$	0	0	1	1	первый операнд
$f(x,y)=\neg (x \leftarrow y)$	0	1	0	0	отрицание обратной импликации
$f(x,y)=y$	0	1	0	1	второй операнд
$f(x,y)=x \oplus y$	0	1	1	0	исключающее или , XOR, сумма Жегалкина
$f(x,y)=x \vee y$	0	1	1	1	дизъюнкция , логическое ИЛИ, or
$f(x,y)=x \downarrow y$	1	0	0	0	стрелка Пирса , НЕ-ИЛИ, функция Вебба, NOR
$f(x,y)=x \leftrightarrow y$	1	0	0	1	эквивалентность , равенство, $\sim$
$f(x,y)=\neg y$	1	0	1	0	отрицание , логическое Не, not
$f(x,y)=x \leftarrow y$	1	0	1	1	обратная импликация
$f(x,y)=\neg x$	1	1	0	0	отрицание, логическое Не, not
$f(x,y)=x \rightarrow y$	1	1	0	1	импликация , $\supset$
$f(x,y)=x \mid y$	1	1	1	0	штрих Шеффера , НЕ-И, NAND
$f(x,y)=1$	1	1	1	1	тождественная единица, тавтология

Основные свойства простейших ФАЛ

Коммутативность

Справедливо для:

- Дизъюнкции $X_1 \vee X_2 = X_2 \vee X_1$
- Конъюнкции $X_1 \& X_2 = X_2 \& X_1$
- Штриха Шеффера $X_1 \mid X_2 = X_2 \mid X_1$
- Стрелки Пирса $X_1 \downarrow X_2 = X_2 \downarrow X_1$
- Исключающее или $X_1 \oplus X_2 = X_2 \oplus X_1$
- Эквивалентности $X_1 \sim X_2 = X_2 \sim X_1$

Ассоциативность

- $X_1 \vee (X_2 \vee X_3) = (X_1 \vee X_2) \vee X_3$ $X_1 (X_2 X_3) = (X_1 X_2) X_3$
- $X_1 \oplus (X_2 \oplus X_3) = (X_1 \oplus X_2) \oplus X_3$
- $X_1 \sim (X_2 \sim X_3) = (X_1 \sim X_2) \sim X_3$

Основные свойства простейших ФАЛ(2)

- Дистрибутивность

Конъюнкции относительно дизъюнкции

$$X_1 \& (X_2 \vee X_3) = (X_1 \& X_2) \vee (X_1 \& X_3)$$

Дизъюнкции относительно конъюнкции

$$X_1 \vee (X_2 \& X_3) = (X_1 \vee X_2) \& (X_1 \vee X_3)$$

Конъюнкция относительно сложению по модулю два

$$X_1 \& (X_2 \oplus X_3) = (X_1 \& X_2) \oplus (X_1 \& X_3)$$

- Свойства инверсии

$$\overline{\overline{X}} = X, \quad \overline{1} = 0, \quad \overline{0} = 1$$

- Свойства идемпотентности (тождественности)

$$X \& X = X, \quad X \vee X = X$$

- Свойства конъюнкции

$$X \& 1 = X, \quad X \& 0 = 0, \quad X \& \overline{X} = 0$$

- Свойства дизъюнкции

$$X \vee 1 = 1, \quad X \vee 0 = X, \quad X \vee \overline{X} = 1$$

Основные свойства простейших ФАЛ (3)

Законы де Моргана

$$\neg(x \& y) = (\neg x) \vee (\neg y)$$

$$\neg(x \vee y) = (\neg x) \& (\neg y)$$

Операция поглощения

$$X_1 \& (X_1 \vee X_2) = X_1$$

$$X_1 \vee (X_1 \& X_2) = X_1$$

Операция склеивания

$$(X_1 \& X_2) \vee (X_1 \& \neg X_2) = X_1$$

$$(X_1 \vee X_2) \& (X_1 \vee \neg X_2) = X_1$$

Нахождение изображающего числа

- Через таблицу истинности

$$X_1 \rightarrow (\neg (\neg X_2 \& \neg X_3))$$

- Перед построением таблицы истинности выражение *попробовать* упростить
- $X_1 \rightarrow (\neg (\neg X_2 \& \neg X_3)) = X_1 \rightarrow (X_2 \vee X_3)$

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$X_2 \vee X_3$	0	1	1	1	0	1	1	1
$X_1 \rightarrow (X_2 \vee X_3)$	1	1	1	1	0	1	1	1

Существенные и фиктивные аргументы

- Аргумент x_i функции $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ называется существенным, а функция существенно зависит от аргумента x_i , если выполняется соотношение

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

- хотя бы для одной комбинации

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

- в противном случае аргумент x_i называется фиктивным, а функция f фиктивно зависит (по существу – не зависит) от аргумента x_i .

Пример фиктивного аргумента

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$f(x_1, x_2)$	1	1	0	0

x_1	0	1
$g(x_1)$	1	0

Если обнаружено, что некоторый аргумент x_i функции $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ является фиктивным, то в таблице истинности функции f можно вычеркнуть половину столбцов (наборов)

Алгоритм проверки существенности (фиктивности) аргумента

1. n -разрядные наборы, образующие множества T_0 и T_1 , выписываются в виде двух столбцов
2. Из всех n -разрядных наборов множеств T_0 и T_1 исключается i -й символ.

$$T_0 = \left\{ \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \\ < \alpha_{1\mu}, \dots, \alpha_{i\mu}, \dots, \alpha_{n\mu} > \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right\}; \quad T_1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \\ < \alpha_{1j}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \alpha_{nj} > \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right\}$$

3. Анализируются полученные множества $(n-1)$ -разрядных наборов T_0^i и T_1^i ; если в этих множествах возникли одинаковые наборы, то это значит, что разделить исходные множества T_0 и T_1 без помощи i -го символа в наборах нельзя, и, следовательно, аргумент x_i является *существенным*, в противном случае x_i — фиктивный аргумент.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ

- Функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется двойственной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

- Пример

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	0	0	1	0	1
f^*	0	1	0	1	1	1	0	0

- Принцип двойственности: если некоторая суперпозиция ФАЛ $f[f_1, f_2, \dots, f_m]$ реализует функцию φ , то такая же суперпозиция $f^*[f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*]$ соответственно двойственных функций реализует функцию, двойственную φ , т.е. φ^* .

Двойственные функции

- конъюнкция и дизъюнкция;
- штрих Шеффера и стрелка Пирса;
- импликация и функция запрета;
- сложение по модулю два и эквиваленция;
- тождественная функция $x^* = x$;
- инверсия $(\bar{x})^* = \bar{x}$.

Теорема де Моргана

- Если есть n -местная ФАЛ, выраженная через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, то отрицание этой функции можно получить путем формального преобразования имеющегося выражения: заменой символов дизъюнкции символами конъюнкции и наоборот; заменой всех аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ их отрицаниями, т.е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \&, \vee) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \vee, \&)$$

Минтерм (конъюнкт)

- Минтермом $F_j^{(n)}$ ранга n называется n -местная ФАЛ в форме логического произведения (конъюнкции) n логических переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которое каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме.

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$$

$$\langle 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \rangle = 19 \qquad F_{19}^{(5)}$$

Соответствие между минтермом и двоичным набором

$$x_i^{\alpha_{ij}} = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{при } \alpha_{ij} = 0; \\ x_i & \text{при } \alpha_{ij} = 1; \end{cases} \quad \overline{(x_i^{\alpha_{ij}})} = (\bar{x}_i)^{\alpha_{ij}} = x_i^{\overline{\alpha_{ij}}}$$

- где α_{ij} - одноразрядное двоичное число

$$F_j^{(n)} = \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ij}}$$

$$\langle \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj} \rangle = j$$

Свойства минтермов

1. Любой минтерм n -го ранга равен 1 на одном единственном наборе, соответствующем номеру минтерма в n -разрядной двоичной записи, и равен 0 на всех других наборах. Например,

$$F_{19}^{(5)} = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 = \begin{cases} 1 & \text{на наборе } \langle 10011 \rangle = 19; \\ 0 & \text{на всех других наборах.} \end{cases}$$

2. Логическая сумма (дизъюнкция) всех (!) минтермов n -го ранга равна 1, т.е.

$$\bigvee_{j=0}^{2^n-1} F_j^{(n)} = 1$$

Справедливость обусловлена тем, что для любого из наборов найдется минтерм n -го ранга, равный 1 на этом наборе.

Макстерм (дизъюнкт)

- Макстермом ранга n $\Phi_j^{(n)}$ называется n -местная ФАЛ в форме логической суммы (дизъюнкции) n логических переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме, т.е.
- $\Phi_j^{(n)} = \bigvee_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ij}}$, где $j = \langle \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj} \rangle$.
- Как и для минтермов, существует взаимно однозначное соответствие между элементами множества n -разрядных двоичных наборов (и их десятичных номеров j) и всеми макстермами n -го ранга. Например,

$$j = \langle 11111 \rangle = 31; \quad \Phi_{31}^{(5)} = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5;$$

$$j = \langle 10011 \rangle = 19; \quad \Phi_{19}^{(5)} = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5;$$

$$j = \langle 00000 \rangle = 0; \quad \Phi_0^{(5)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5.$$

Свойства макстермов

1. Любой макстерм n -го ранга равен 0 на одном единственном наборе, противоположном двоичной записи номера макстерма, т.е. имеющем десятичный номер $(2^n - 1 - j)$, и равен 1 на всех других наборах.

$$\Phi_{19}^{(5)} = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5 = \begin{cases} 0 & \text{на наборе } \langle 01100 \rangle = 12; \\ 1 & \text{на всех других наборах.} \end{cases}$$

2. Логическое произведение (конъюнкция) всех (!) макстермов n -го ранга равна 0, т.е. так как для любого из 2^n наборов найдется макстерм n -го ранга, равный 0 на этом наборе.

$$3. \quad \overline{\Phi_j^{(n)}} = F_{2^n - 1 - j}^{(n)}; \quad \overline{F_j^{(n)}} = \Phi_{2^n - 1 - j}^{(n)}$$

$$4. \quad [\Phi_j^{(n)}]^* = F_j^{(n)}; \quad [F_j^{(n)}]^* = \Phi_j^{(n)}$$

СДНФ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{j \in T_1} \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ij}} = \bigvee_{j \in T_1} F_j^{(n)}$$

- Представление n-местной ФАЛ в форме дизъюнкции минтермов максимального (n-го) ранга, равных 1 на наборах из множества T_1 , называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).
- Любую ФАЛ (кроме константы 0) можно представить в виде СДНФ

Пример СДНФ

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	1	0	0	1

$$T_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{Bmatrix}$$

$$F_1^{(3)} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3; \quad F_2^{(3)} = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3; \quad F_4^{(3)} = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3; \quad F_7^{(3)} = x_1 x_2 x_3.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = F_1^{(3)} \vee F_2^{(3)} \vee F_4^{(3)} \vee F_7^{(3)} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

СКНФ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{j \in T_0} \left[\bigvee_{i=1}^n \bar{x}_i^{\alpha_{ij}} \right] = \bigwedge_{j \in T_0} \Phi_{2^n - 1 - j}^{(n)}$$

- Представление n-местной ФАЛ в форме конъюнкции макстермов максимального (n-го) ранга, равных 0 на наборах их множества T_0 , называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)
- Любую ФАЛ (кроме константы 1) можно представить в виде СКНФ

Пример СКНФ

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	1	0	0	1

$$T_0 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{7-0}^{(3)} = \Phi_7^{(3)} &= x_1 \vee x_2 \vee x_3; & \Phi_{7-3}^{(3)} = \Phi_4^{(3)} &= x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3; \\ \Phi_{7-5}^{(3)} = \Phi_2^{(3)} &= \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3; & \Phi_{7-6}^{(3)} = \Phi_1^{(3)} &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \Phi_7^{(3)} \cdot \Phi_4^{(3)} \cdot \Phi_2^{(3)} \cdot \Phi_1^{(3)} = \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

ДНФ

- Представление ФАЛ в виде дизъюнкции минтермов (не обязательно максимального ранга) называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ); произвольная ФАЛ может иметь несколько ДНФ.

Например,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3}^{\text{ДНФ}_1} = \overbrace{x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}^{\text{ДНФ}_2} = \overbrace{x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2}^{\text{ДНФ}_3} = \overbrace{x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}^{\text{ДНФ}_4 = \text{СДНФ}}$$

КНФ

- представление ФАЛ в виде конъюнкции макстермов (не обязательно максимального ранга) называется конъюнктивной нормальной формой(КНФ); произвольная ФАЛ может иметь несколько КНФ. Например,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}^{КНФ_1} = \overbrace{(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}^{КНФ_2} = \overbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)}^{КНФ_3} = \\ &= \overbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}^{КНФ_4=СКНФ} \end{aligned}$$

Полином Жегалкина

$$P(X_1, \dots, X_n) = a \oplus a_1 X_1 \oplus a_2 X_2 \oplus \dots \oplus a_n X_n \oplus a_{12} X_1 X_2 \oplus a_{13} X_1 X_3 \oplus \dots \oplus a_{1\dots n} X_1 \dots X_n,$$

$$a, \dots, a_{1\dots n} \in \{0, 1\},$$

$$P = a \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ k \in \overline{1, n}}} a_{i_1, \dots, i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad a, a_{i_1, \dots, i_k} \in \{0, 1\}.$$

$$P = B \oplus AB,$$

$$P = X \oplus YZ \oplus ABX \oplus ABDYZ,$$

$$P = 1 \oplus A \oplus ABD.$$

Теорема Жегалкина

Каждая булева функция единственным образом представляется в виде полинома Жегалкина.

Доказательство

Различных булевых функций от n переменных 2^{2^n} . При этом конъюнкций вида $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ существует ровно 2^n , так как из n возможных сомножителей каждый или входит в конъюнкцию, или нет. В полиноме у каждой такой конъюнкции стоит 0 или 1, то есть существует 2^{2^n} различных полиномов Жегалкина от n переменных. Теперь достаточно лишь доказать, что различные полиномы реализуют различные функции. Предположим противное. Тогда приравняв два различных полинома и перенеся один из них в другую часть равенства, получим полином, тождественно равный нулю и имеющий ненулевые коэффициенты. Тогда рассмотрим слагаемое с единичным коэффициентом наименьшей длины, то есть с наименьшим числом переменных, входящих в него (любой один, если таких несколько). Подставив единицы на места этих переменных и нули на места остальных, получим, что на этом наборе только одно это слагаемое принимает единичное значение, то есть нулевая функция на одном из наборов принимает значение 1. Противоречие. Значит, каждая булева функция реализуется полиномом Жегалкина единственным образом.

Свойства полинома Жегалкина

$$A \vee B = A \oplus B \oplus AB,$$

$$\overline{A} = A \oplus 1.$$

$$A \oplus A = 0,$$

$$(A \oplus B)C = AC \oplus BC.$$

Нахождение полинома Жегалкина методом треугольника

A	B	C	P
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

000	001	010	011	100	101	110	111
1	C	B	BC	A	AC	AB	ABC
①	①	0	0	0	0	①	0
0	1	0	0	0	1	1	
1	1	0	0	1	0		
0	1	0	1	1			
1	1	1	0				
0	0	1					
0	1						
1							

$$P = 1 \oplus C \oplus AB$$

Нахождение полинома Жегалкина методом Паскаля

1 ⊕ 0	1 ⊕ 1	0 ⊕ 0	1 ⊕ 0				
1 ⊕ 1 ⊕ 1 ⊕ 0	0 ⊕ 0 ⊕ 1 ⊕ 1						
1 ⊕ 1 ⊕ 0 ⊕ 1 ⊕ 0 ⊕ 0 ⊕ 1 ⊕ 1							
1	1	0	1	1	1	1	0
1	c	b	bc	a	ac	ab	abc

$$f(a, b, c) = 1 \oplus a \oplus c \oplus ab \oplus ac \oplus bc$$

$\oplus$ — побитная операция «Исключающее ИЛИ»

Полные системы ФАЛ

- Какими свойствами должен обладать конечный набор или система функций $\Phi = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ для того, чтобы *всякая* ФАЛ могла быть представлена суперпозицией функций из Φ ?
- Такую систему функций Φ называют функционально полной (или просто полной)

Полные системы ФАЛ

- все ФАЛ;
- все двухместные ФАЛ;
- дизъюнкция, конъюнкция, отрицание;
- конъюнкция, сложение по модулю 2, константа 1.

Предполные системы ФАЛ

- P_0 – класс функций, сохраняющих 0;
 $f(0, \dots, 0) = 0$
- P_1 – класс функций, сохраняющих 1;
 $f(1, \dots, 1) = 1$
- L – класс линейных функций;
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$
- S – класс самодвойственных функций;
 $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$
- M – класс монотонных функций

Монотонность ФАЛ

- набор $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ *предшествует* набору $\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i=1, 2, \dots, n$, что обозначается

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \leq \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$$

- Существуют несравнимые наборы
- ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для двух любых n -разрядных наборов, связанных отношением предшествования имеет место

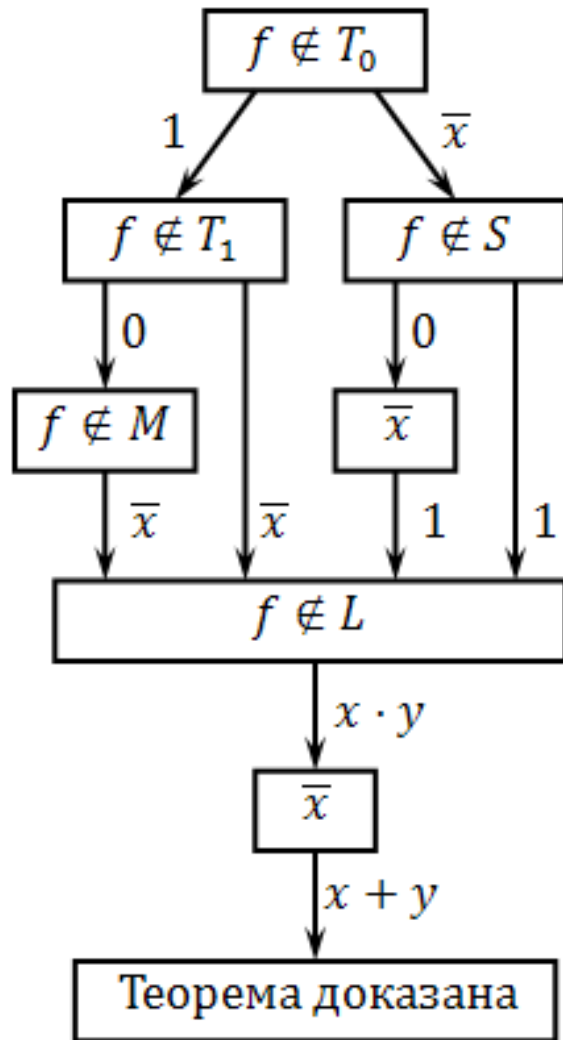
$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

Теорема Поста о функциональной полноте

Для полноты системы функций Φ необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов: P_0 , P_1 , L , S и M в Φ нашлась функция, ему не принадлежащая

ФАЛ	Предполный класс				
	P_0	P_1	L	S	M
$\&$	$\in$	$\in$	—	—	$\in$
$\vee$	$\in$	$\in$	—	—	$\in$
$\oplus$	$\in$	—	$\in$	—	—
$\sim$	—	$\in$	$\in$	—	—
$\downarrow$	—	—	—	—	—
$ $	—	—	—	—	—
x	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\neg x$	—	—	$\in$	$\in$	—
$\rightarrow$	—	$\in$	—	—	—
$\neg \rightarrow$	$\in$	—	—	—	—
0	$\in$	—	$\in$	—	$\in$
1	—	$\in$	$\in$	—	$\in$

Доказательство



Имея функцию, не сохраняющую 0, получим инвертор или константу 1

Рассмотрим функцию, не принадлежащую классу T_0 . Для неё

$$f(0, 0, \dots, 0) = 1.$$

Эта функция может принадлежать, а может не принадлежать классу T_1 .

- В первом случае $f(1, 1, \dots, 1) = 1$, тогда $f(x, x, \dots, x) = 1$, и мы имеем константу единицы.
- Во втором случае $f(1, 1, \dots, 1) = 0$, тогда $f(x, x, \dots, x) = \bar{x}$, и мы имеем инвертор.

Имея функцию, не сохраняющую 1, получим инвертор или константу 0

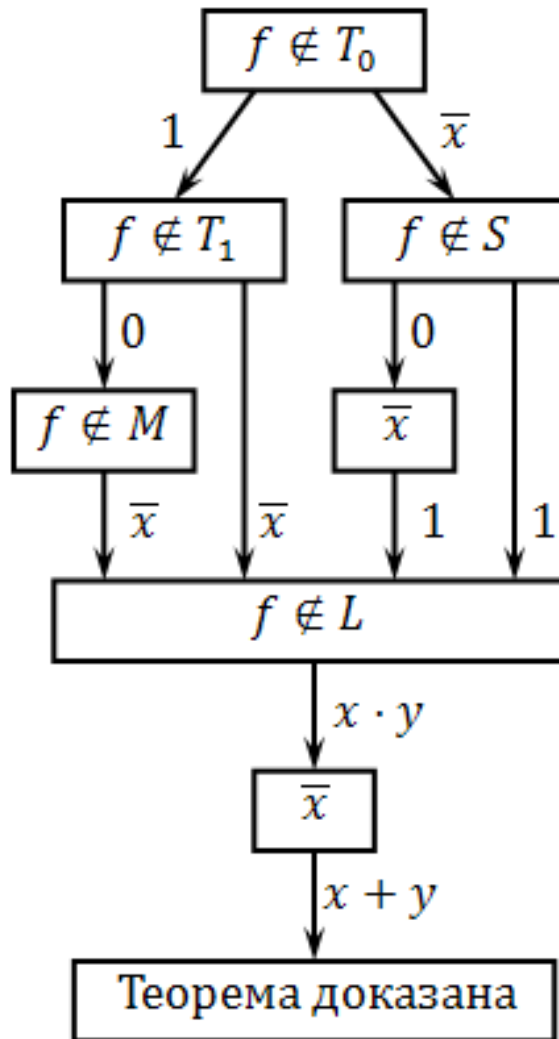
Рассмотрим функцию, не принадлежащую классу T_1 . Для неё

$$f(1, 1, \dots, 1) = 0.$$

Эта функция может принадлежать, а может не принадлежать классу T_0 .

- В первом случае $f(0, 0, \dots, 0) = 0$, тогда $f(x, x, \dots, x) = 0$, и мы имеем константу нуля.
- Во втором случае $f(0, 0, \dots, 0) = 1$, тогда $f(x, x, \dots, x) = \bar{x}$, и мы имеем инвертор.

Доказательство



Имея инвертор и несамоудвойственную функцию, получим одну из констант

Рассмотрим функцию, не принадлежащую классу S самоудвойственных функций. Для неё найдётся такой набор входных переменных X , что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Пусть, например, $f(0, 1, 0) = f(1, 0, 1) = 1$, тогда $f(x, \bar{x}, x) = 1$ и мы имеем константу 1.

Аналогично, если, например, $f(0, 0, 0, 1) = f(1, 1, 1, 0) = 0$, тогда $f(x, x, x, \bar{x}) = 0$ и мы имеем константу 0.

Имея инвертор и одну из констант, получим другую константу

Если в одном из вышеперечисленных случаев мы получили инвертор и одну из констант, вторую константу получим с помощью инвертора: $\bar{0} = 1$ или $\bar{1} = 0$.

Имея немонотонную функцию и обе константы, получим инвертор

Для немонотонной функции обязательно найдётся такой набор входных переменных, что

$$f(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n) = 1 \text{ и } f(x_1, x_2, \dots, 1, \dots, x_n) = 0.$$

Пусть, например, $f(1, 1, 0) = 0$ и $f(1, 0, 0) = 1$. Тогда $f(1, x, 0) = \bar{x}$.

Доказательство

Имея нелинейную функцию, инвертор и константу 1, получим конъюнкцию

Нелинейная функция по определению имеет в полиноме Жегалкина хотя бы один член, содержащий конъюнкцию нескольких переменных. Пусть, например, имеется некоторая нелинейная функция

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 x_4 \oplus x_2 x_3 x_5 \oplus x_2 x_3 x_4 x_5.$$

Зададимся целью построить на её основе конъюнкцию $c(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Присвоим переменным x_3, x_4, x_5 значения 1, получим:

$$f(x_1, x_2, 1, 1, 1) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2.$$

Очевидно, что в общем случае после такого преобразования получится функция вида

$$f(x_1, x_2, 1, 1, \dots, 1) = x_1 x_2 [\oplus x_1] [\oplus x_2] [\oplus 1],$$

где квадратные скобки означают, что выделенный ими член может присутствовать в окончательном выражении, а может и нет.

В простейшем случае при отсутствии других членов сразу получаем конъюнкцию:

$$f(x_1, x_2, 1, 1, \dots, 1) = x_1 x_2.$$

Рассмотрим другие варианты.

- $x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1 \bar{x}_2;$
- $x_1 x_2 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2;$
- $x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 x_2}.$
- $x_1 x_2 \oplus 1 = \overline{x_1 x_2};$
- $x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1 = x_1 \bar{x}_2;$
- $x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus 1 = \bar{x}_1 x_2;$
- $x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = \overline{x_1 x_2}.$

Любое из этих выражений, используя инвертор, можно привести к конъюнкции.

Примеры полных систем ФАЛ

№ п/п	Система ФАЛ	Предполный класс				
		P_0	P_1	L	S	M
1	$\&$			$\notin$	$\notin$	
	$\vee$			$\notin$	$\notin$	
	$\neg x$	$\notin$	$\notin$			$\notin$
2	$\rightarrow$	$\notin$		$\notin$	$\notin$	$\notin$
	0		$\notin$		$\notin$	
3	$\rightarrow$	$\notin$		$\notin$	$\notin$	$\notin$
	$\neg x$	$\notin$	$\notin$			$\notin$
4	$\downarrow$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
5	/	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
6	$\oplus$		$\notin$		$\notin$	$\notin$
	$\&$			$\notin$	$\notin$	
	1	$\notin$			$\notin$	
7	$\&$			$\notin$	$\notin$	
	0		$\notin$		$\notin$	
	1	$\notin$			$\notin$	
	$x \oplus y \oplus z$					$\notin$

Базис

Полная система функций Φ образует базис, если всякая ее подсистема не является полной

Теорема. Максимальное число функций в базисе алгебры логики = 4

1) Докажем, что из любой полной системы функций можно выделить полную подсистему, состоящую не более чем из четырёх функций.

Согласно критерию Поста, в полной системе должны присутствовать пять функций:

$$f_0 \notin T_0; f_1 \notin T_1; f_S \notin S; f_M \notin M; f_L \notin L.$$

Рассмотрим функцию f_0 . Возможны два случая:

- $f_0 \in T_1$, тогда : $f_0 \notin S$ и система $[f_0, f_1, f_M, f_L]$ полна.
- $f_0 \notin T_1$, тогда : $f_0 \notin M, T_1$ и система $[f_0, f_S, f_L]$ полна.

2) Покажем, что существует базис из четырёх функций. Рассмотрим систему функций $\{0, 1, x \cdot y, x \oplus y \oplus z\}$. Эта система полна:

$$0 \notin T_1, S; 1 \notin T_0; x \cdot y \notin L; x \oplus y \oplus z \notin M.$$

Однако ни одна его подсистема не полна:

- $\{0, 1, x \cdot y\} \subseteq M;$
- $\{0, 1, x \oplus y \oplus z\} \subseteq L;$
- $\{0, x \cdot y, x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_0;$
- $\{1, x \cdot y, x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_1.$

Теорема доказана.

Двоичное кодирование

- Всякое сообщение, записанное с использованием символов некоторого алфавита, можно представить в виде некоторой последовательности из нулей и единиц. В самом деле, пусть $A=\{a,b,\dots\}$ – конечный алфавит. Выберем число n так, чтобы 2^n было не меньше, чем число его символов. Перенумеруем символы алфавита (начиная нумерацию с нуля) и припишем каждому из них его двоичный код – двоичную запись номера символа с использованием n двоичных разрядов (битов). Текст $ab\dots$, представляется последовательностью блоков
- $\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1\alpha_0\beta_{n-1}\beta_{n-2}\dots\beta_1\beta_0\dots$,
где $\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1\alpha_0$ – двоичная запись номера символа a ,
- $\beta_{n-1}\beta_{n-2}\dots\beta_1\beta_0$ – двоичная запись номера символа b , и т.д.

Векторное пространство $\{0,1\}^n$

На множестве n -мерных двоичных векторов определим операцию $\oplus$ – сложение по модулю 2. Сумма двоичных векторов $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ определяется формулой

$$\alpha \oplus \beta = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \dots, \alpha_n \oplus \beta_n).$$

Вектор $\alpha \oplus \beta$ содержит единицы на тех местах, где координаты векторов α и β различаются, и нули – на тех, где совпадают.

Примеры. $(0,1,0,1) \oplus (0,0,1,1) = (0,1,1,0);$

$$(0,1,0,1) \oplus (1,1,1,1) = (1,0,1,0);$$

$$(0,1,0,1) \oplus (0,1,0,1) = (0,0,0,0). \square$$

Система n -мерных двоичных векторов линейно зависима, если сумма (по модулю 2) нескольких векторов из этой системы равна 0

в пространстве $\{0,1\}^n$ любая система, содержащая более n векторов, линейно зависима;

любые n линейно независимых векторов образуют базис пространства $\{0,1\}^n$; всякий вектор из $\{0,1\}^n$ может быть единственным образом представлен в виде суммы нескольких базисных векторов.

Двоичные векторы $(0,0,\dots,0,1), (0,0,\dots,1,0), \dots, (1,0,\dots,0,0)$ образуют базис пространства $\{0,1\}^n$, называемый каноническим.

Расстояние Хемминга

$$d(\alpha, \beta) = w(\alpha \oplus \beta)$$

Число единичных координат двоичного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ обозначают через $w(\alpha)$ и называют *весом* вектора α . Очевидно,

$$w(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

- 1) $d(\alpha, \alpha) = 0$ и $d(\alpha, \beta) > 0$ при $\alpha \neq \beta$;
- 2) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$;
- 3) $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geq d(\alpha, \gamma)$ (неравенство треугольника).

Блочные двоичные коды

- При передаче информации в каналах связи передаваемые сигналы могут искажаться.
- Чтобы обеспечить надежную передачу информации, вместе с основной информацией пересылают дополнительную, позволяющую судить об искаженности принятых сообщений.
- Коды делятся на два больших класса:
 - коды с обнаружением ошибок,
 - коды с исправлением ошибок.

Код, обнаруживающий одиночные ошибки

$$E(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4) \in \{0, 1\}^5.$$

По каналу связи пересылается сообщение $E(\alpha)$. В пересылаемом сообщении число единичных битов четно:

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4 \oplus (\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4) = 0.$$

Код, исправляющий ошибки

$$E(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7),$$

$$\alpha_5 = \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4;$$

$$\alpha_6 = \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4;$$

$$\alpha_7 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_4.$$

Сообщение $E(\alpha) \in \{0,1\}^7$ передается по каналам связи. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7)$ – принятое сообщение. Вычислим следующие суммы:

$$\sigma_1 = \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7;$$

$$\sigma_2 = \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7;$$

$$\sigma_3 = \beta_1 \oplus \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7.$$

Если сообщение передано без ошибки, то все три суммы нулевые. В самом деле, при безошибочной передаче $\beta_i = \alpha_i$ для $i=1,2,\dots,7$. Легко видеть, что после замены α_5 , α_6 , α_7 их выражениями через α_1 , α_2 , α_3 и α_4 , каждая из сумм σ_1 , σ_2 , σ_3 содержит четное число слагаемых α_i , $i=1,2,3,4$, и потому равна 0. Верно и обратное. Если все три суммы нулевые, сообщение передано без ошибки. В противном случае число j , $1 \leq j \leq 7$, с двоичной записью $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ указывает номер позиции, в которой произошла ошибка. Пусть, например, ошибка произошла в первой позиции. Тогда $\beta_1 = 1 \oplus \alpha_1$ и $\beta_i = \alpha_i$ при $i=2,3,\dots,7$. Имеем

Функции кодирования и декодирования

В общем случае (n,m) -блочный двоичный код определяется двумя функциями: функцией кодирования $E: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ и функцией декодирования $D: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$, где $m \leq n$. Векторы вида $E(\alpha) \in \{0,1\}^m$ называются кодовыми словами. Интуитивно ясно, что код тем лучше приспособлен к обнаружению и исправлению ошибок, чем больше различаются его кодовые слова.

Кодовым расстоянием блочного двоичного кода называется величина $d(E)$, равная наименьшему расстоянию между различными кодовыми словами:

$$d(E) = \min \{ d(E(\alpha), E(\beta)) \mid \alpha, \beta \in \{0,1\}^n, \alpha \neq \beta \}.$$

Выбор расстояния

Теорема. 1) Код позволяет обнаруживать ошибки в k (или менее) позициях тогда и только тогда, когда его кодовое расстояние превышает k .

2) Код позволяет обнаруживать и исправлять ошибки в k (или менее) позициях тогда и только тогда, когда его кодовое расстояние превышает $2k$.

Если функция кодирования блочного кода

$$E: \{0,1\}_n \rightarrow \{0,1\}_m$$

линейна, то код называется линейным.

Коды Хемминга

Число контрольных битов - k .

Выбрать минимальное k из отношения:

$$n \leq (2^k - k + 1)$$

Вставим в информационное слово контрольные биты $r_0 \dots r_4$ таким образом, чтобы номера их позиций представляли собой целые степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16...

Получим 20-разрядное слово с 15 информационными и 5 контрольными битами.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
r_0	r_1	x_1	r_2	x_2	x_3	x_4	r_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	r_4	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}		
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1		
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	r_0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	r_1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	r_2	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	r_3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	r_4	1

Реализация

```
for i in range(k):
    res = [0]*(n+k)
    for j in range(2**i-1, (n+k), 2**(i+1)):
        res[j:j+2**i]=[1]*(2**i)
    num[2**i-1]=sum(map(lambda x: x[0]&x[1], zip(num,res[: (n+k)])))%2
    r.append(num[2**i-1])
    print(f"r{i}      ", res[: (n+k)], num[2**i-1])
```

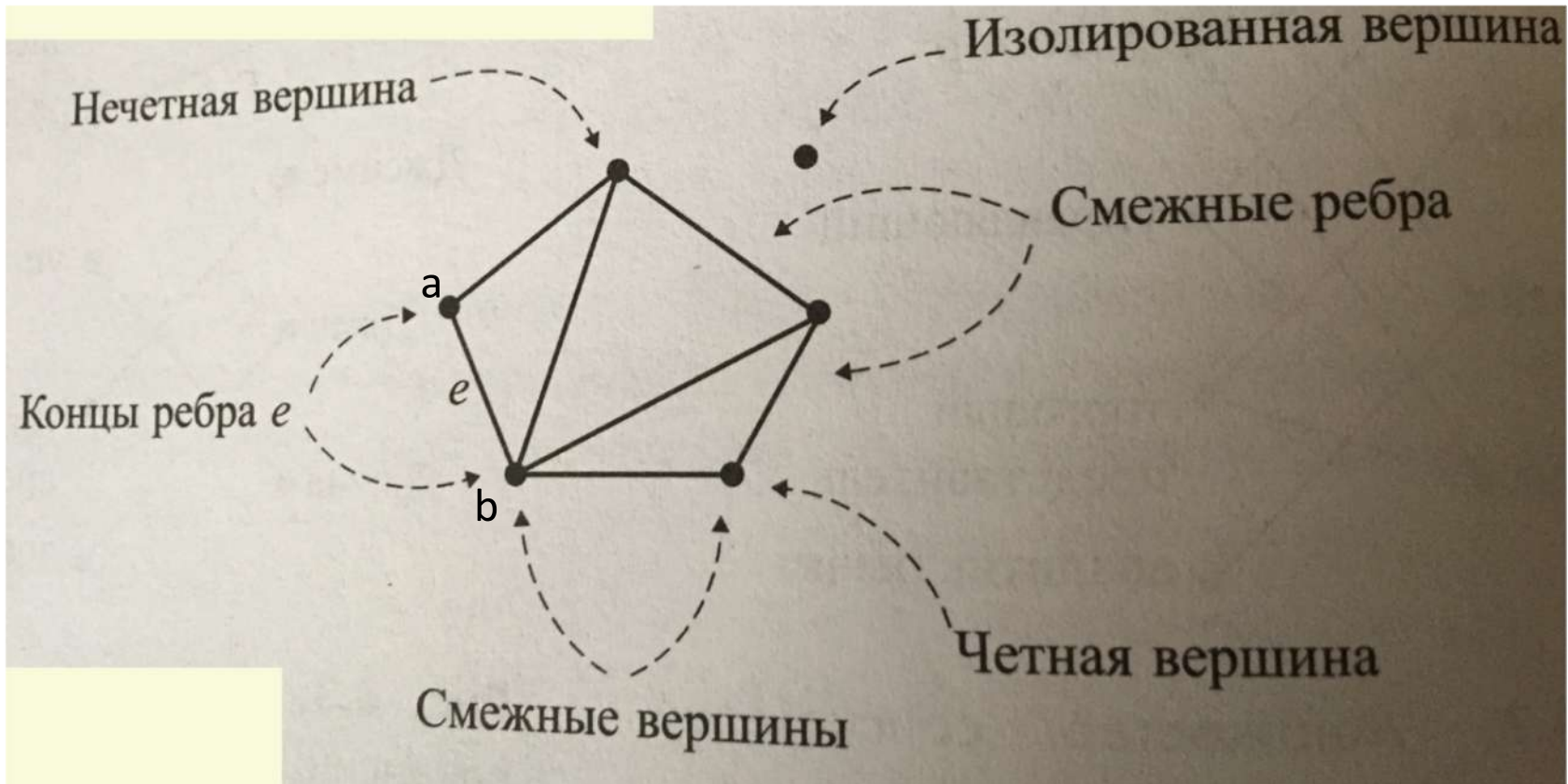
Декодирование с ошибкой. s – синдром – номер соответствует номеру бита с ошибкой

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
r_0	r_1	x_1	r_2	x_2	x_3	x_4	r_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	r_4	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}		
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1		
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	s_0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	s_1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	s_2	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	s_3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	s_4	0

Определение графа

- Граф $G=(V,E)$ состоит из конечного непустого множества V (элементы – вершины) и конечного множества E пар различных элементов V , называемых ребрами графа G .
- Вершины ребер могут быть:
 - упорядоченными (ориентированный граф);
 - или
 - неупорядоченных (неориентированный граф).

Названия элементов графа



$e=(a,b)$

Ребро e инцидентно вершинам a и b .

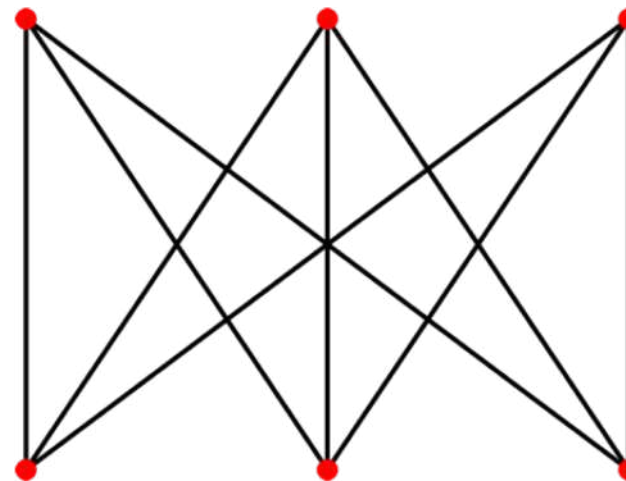
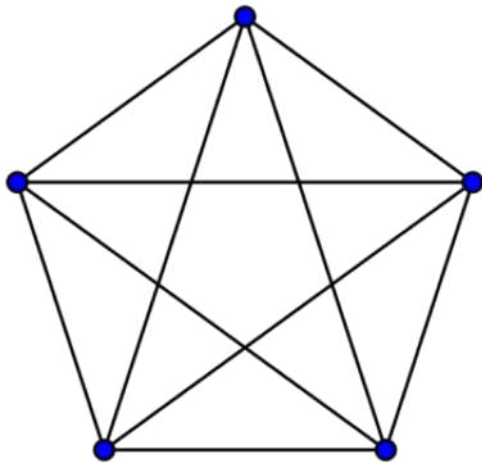
степень вершины $\deg(v)$ – это число инцидентных ей ребер

Определения некоторых «особых» графов

- Граф у которого каждая пара вершин соединена ребром, называется *полным* (насыщенным) графом.
- Граф, степени вершин которого равны, называется *регулярным* графом.
- Если множество вершин графа можно разбить на 2 подмножества V_1 и V_2 (биграф), такие что для любого ребра $e=(v_1, v_2)$ $v_1 \in V_1$, а $v_2 \in V_2$, то граф называется *двудольным*

Планарный граф

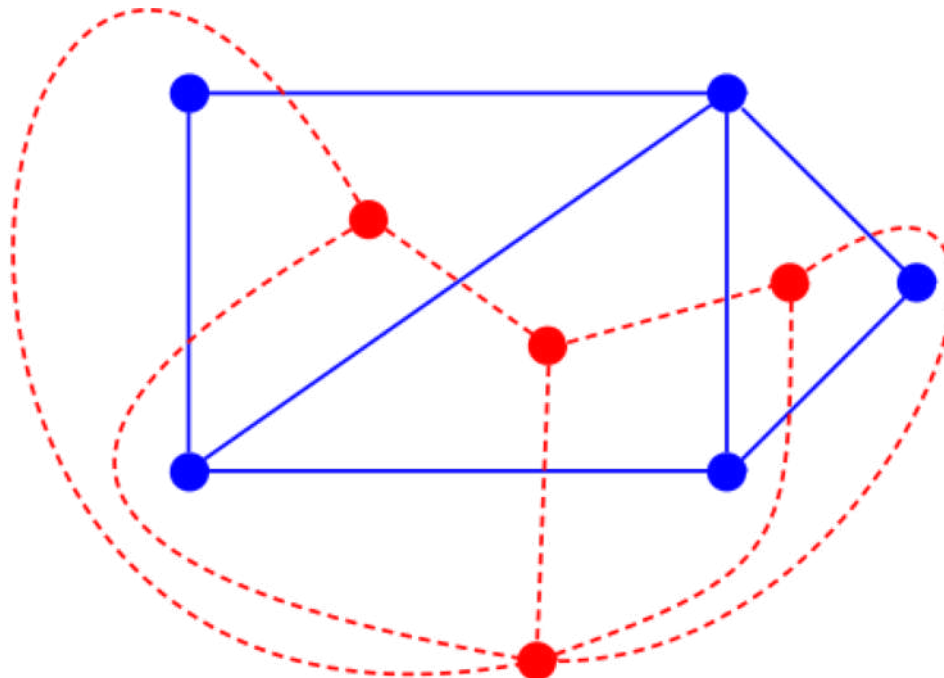
- *Планарный граф* — граф, который может быть изображён на плоскости без пересечения ребер. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его **гранями**.
- Примеры непланарных графов:



- Задача: Есть три дома и три колодца. Можно ли так проложить дорожки между домами и колодцами, чтобы от каждого дома к каждому колодцу вела дорожка, и никакие две дорожки не пересекались бы.

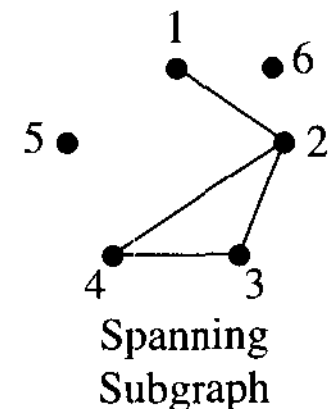
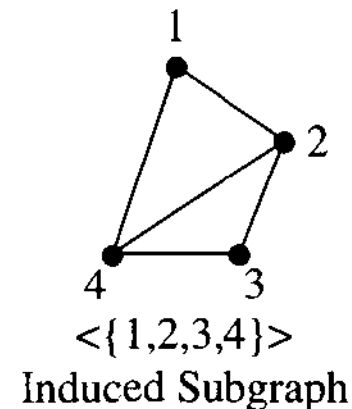
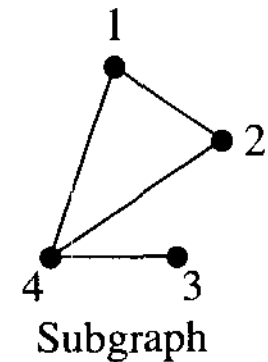
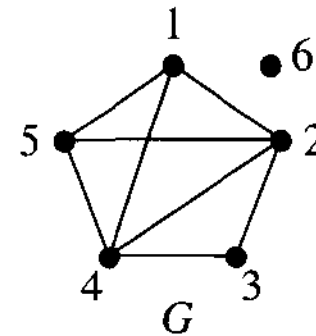
Двойственный граф

Двойственный граф G' к планарному графу G — это граф, в котором вершины соответствуют граням графа G ; две вершины соединены ребром если и только если соответствующие им грани графа G имеют общее ребро. Например, двойственны друг к другу графы куба и октаэдра.



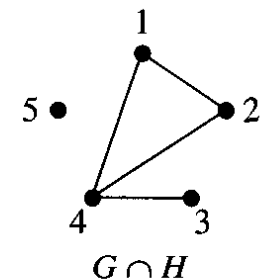
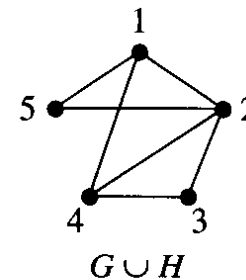
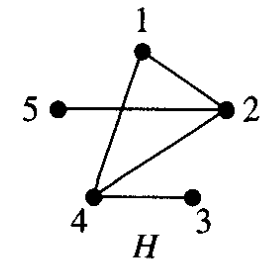
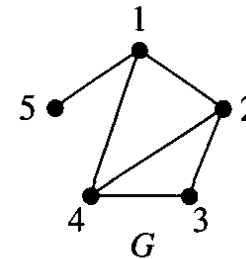
Подграф

- Граф $H=(V_1, E_1)$ называется подграфом графа $G=(V, E)$, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$ и оба конца любого ребра $e \in E_1$ принадлежат V_1 .
- H – остовный подграф если $V = V_1$.
- H – индуцированный подграф, если E_1 состоит из всех ребер G , оба конца которых принадлежат V_1 .



Операции на графах

- $G=(V_1,E_1)$
- $H=(V_2,E_2)$
- $G \cup H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- $G \cap H = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$

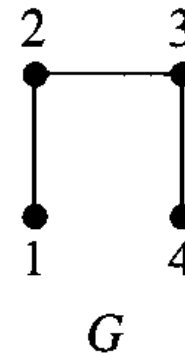


Дополнение графа

- Операция **дополнения графа** $G=(X,F)$ по **отображению** до графа $H=(Y,P)$: $G \subseteq H$, называется такой граф $G_H=(Y,T)$, для которого для любых $y \in Y$, $T_y = P_y \setminus F_y$
- Граф G_H задается на всем множестве вершин графа H , т.е. на Y и включает только те ребра, которые есть в H , но отсутствуют в G .
- Универсальный граф – это граф, для которого все рассматриваемые в данном круге задач графы являются подграфами (это полный граф).

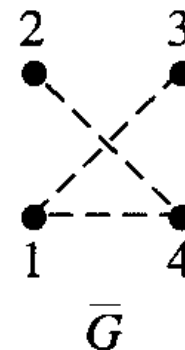
Дополнение графа

- Дополнение графа G по отображению до универсального графа обозначается как $\overline{G}$



- Разность графов

$$Q = G \setminus H = G \cap \overline{H}$$



Задачи о рукопожатиях

- На встрече выпускники ВУЗа пожимали друг-другу руки. Можно ли сказать что-нибудь о числе рукопожатий? Могут ли все пожать разное кол-во рук?
- Дан граф G , в котором более одной вершины. Степени по крайней мере 2-х вершин равны.
- В любом графе число нечетных вершин четно

Степени по крайней мере двух вершин в графе равны

Доказательство.

По индукции.

База. $n_0=2$ – очевидно.

Шаг индукции. $n \geq n_0$, Пусть в графе с n вершинами условие выполняется, добавим вершину v , если она изолирована, то степени вершин не изменятся, а если нет то $1 \leq \deg(v) \leq n$, значит в графе не более n различных степеней вершин, но вершин всего $n+1$, то согласно принципу Дерихле по крайней мере у двух вершин степени совпадают.

Степени вершин

$$G = (V, E), \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

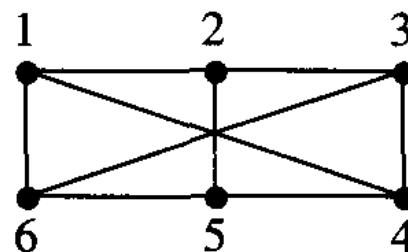
Теорема. В любом графе число нечетных вершин
четно

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \text{ чет}} \deg(v) + \sum_{v \text{ нечет}} \deg(v)$$

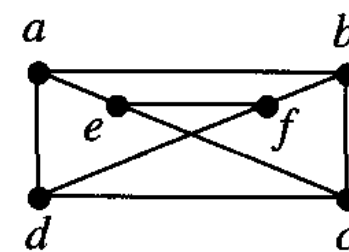
$$\sum_{v \text{ нечет}} \deg(v) = 2|E| - \sum_{v \text{ чет}} \deg(v)$$

Изоморфизм графов

Графы $G=(V_G, E_G)$ и $H=(V_H, E_H)$ называются изоморфными, если существует биекция между множествами вершин графов $F: V_G \rightarrow V_H$ такая, что $(u, v) \in E_G$ тогда и только тогда, когда $(F(u), F(v)) \in E_H$.



G



H

$F: V(G) \rightarrow V(H)$

$1 \longrightarrow a$

$2 \longrightarrow b$

$3 \longrightarrow f$

$4 \longrightarrow e$

$5 \longrightarrow c$

$6 \longrightarrow d$

$E(G) \longrightarrow E(H)$

$(1, 2) \longrightarrow (F(1), F(2)) = (a, b)$

$(2, 3) \longrightarrow (F(2), F(3)) = (b, f)$

$(3, 4) \longrightarrow (F(3), F(4)) = (f, e)$

$(4, 5) \longrightarrow (F(4), F(5)) = (e, c)$

$(5, 6) \longrightarrow (F(5), F(6)) = (c, d)$

$(6, 1) \longrightarrow (F(6), F(1)) = (d, a)$

$(2, 5) \longrightarrow (F(2), F(5)) = (b, c)$

$(1, 4) \longrightarrow (F(1), F(4)) = (a, e)$

$(3, 6) \longrightarrow (F(3), F(6)) = (f, d)$

Аналитические способы задания графа

1) $G=(X,U)$

$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$U=\{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4)\}$

2) $G=(X,F)$

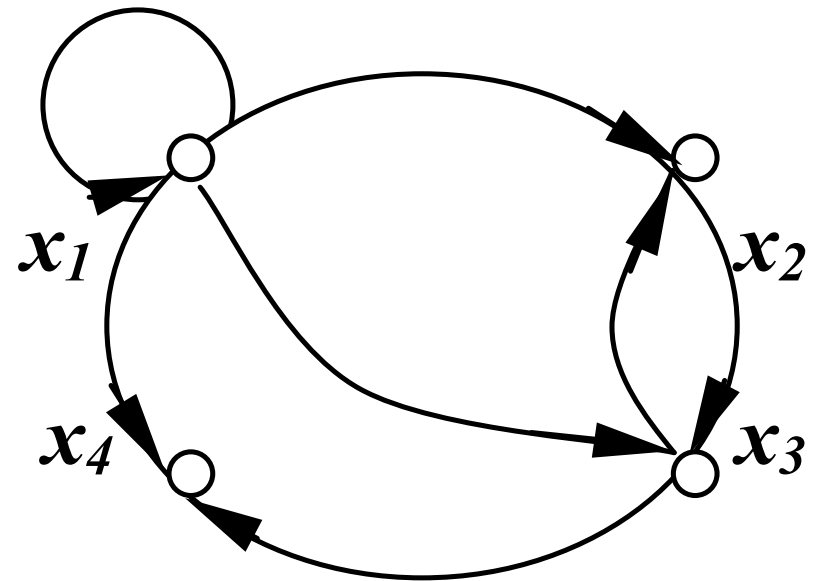
$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$Fx_1=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$Fx_2=\{x_3\}$

$Fx_3=\{x_2, x_4\}$

$Fx_4=\emptyset$

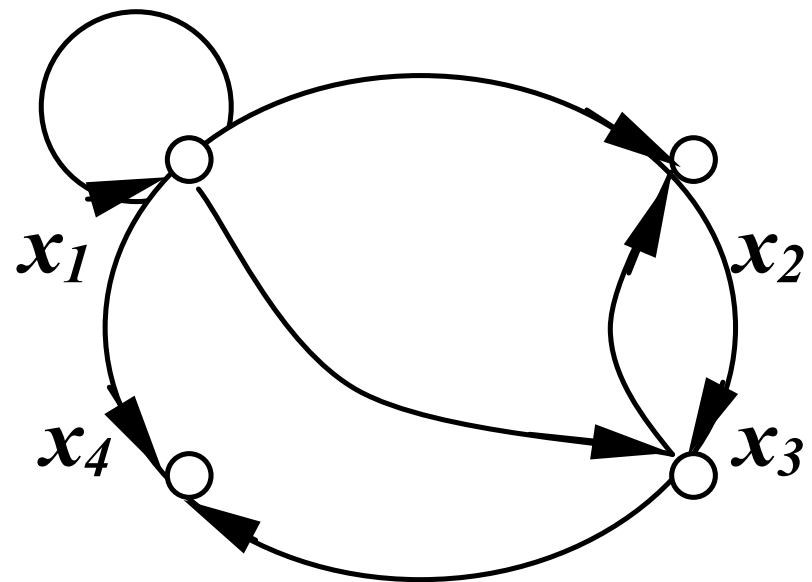


Матричные способы задания графов

- Матрица смежности R

$$R = \{r_{ij}\} \quad i, j = 1..n$$
$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in Fx_i \text{ (т.е. есть дуга } x_i, x_j) \\ 0, & \text{если } x_j \notin Fx_i \text{ (т.е. дуга } x_i, x_j \text{ — отсутствует)} \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



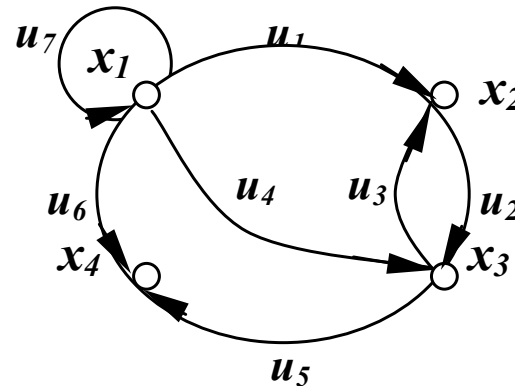
Матрица инцидентности

прямоугольная матрица $A=\{a_{ik}\}$, строки которой поставлены в соответствие вершинам графа, а столбцы есть его ребра. Тогда элементы матрицы a_{ik} будут равны:

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{— если вершина } x_i \text{ не является граничной точкой для ребра } u_k \\ 1 & \text{— если дуга } u_k \text{ заходит в вершину } x_i \\ -1 & \text{— если дуга } u_k \text{ исходит из вершины } x_i \end{cases}$$

В соответствии с этим в каждом столбце матрицы инцидентности будет либо один ненулевой элемент (+1), если это ребро – петля, либо два ненулевых элемента (+1,-1), если ребро – дуга.

Пример:



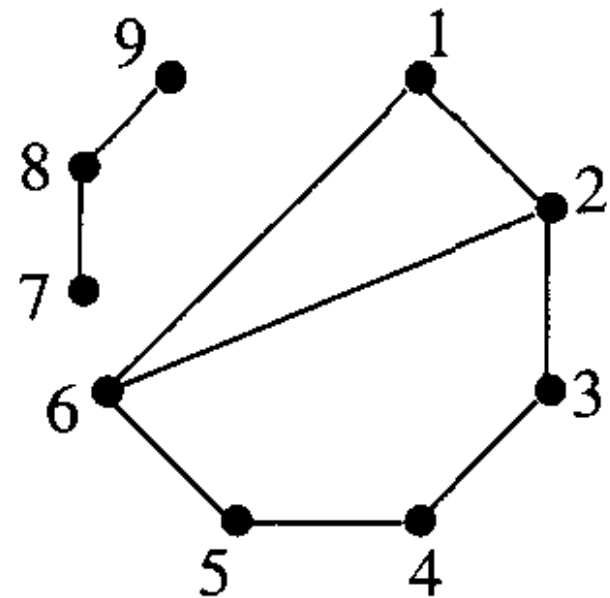
Матрица A будет иметь вид:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	-1	0	0	-1	0	-1	1
x_2	1	-1	1	0	0	0	0
x_3	0	1	-1	1	-1	0	0
x_4	0	0	0	0	1	1	0



Список смежности

Vertices	List of Adjacencies		
1	2	6	
2	1	6	3
3	2	4	
4	3	5	
5	4	6	
6	1	5	2
7	8		
8	7	9	
9	8		



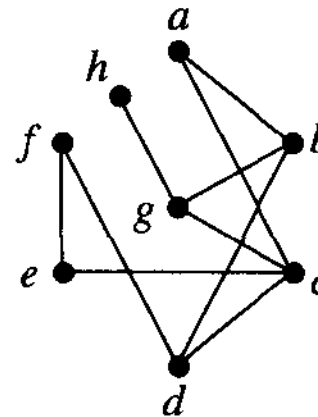
Путь в графе

- **Путем** (или ориентированным маршрутом) в ориентированном графе называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги (отличной от последней) является начальной вершиной следующей.
- Путь имеет начальную и конечную вершины.
- **Длина пути** – число дуг, составляющих путь.
- **Простой путь** – путь, в котором никакая дуга не встречается дважды.
- **Элементарный путь** – путь, в котором никакая вершина не встречается дважды.
- **Контур** – путь, у которого конечная и начальная вершины совпадают (может быть простой и элементарный).
- **Цепь** (маршрут) – последовательность ребер неориентированного графа, когда любые два соседних ребра в этой последовательности – смежные. Цепь имеет две граничные вершины, каждой из которых инцидентно только одно ребро. Цепь может быть простой (каждое ребро встречается только один раз) и элементарной (каждая вершина встречается только один раз).
- **Цикл** – это замкнутая цепь конечной длины, у которой граничные вершины совпадают. Цикл может быть простой и элементарный.

Алгоритм поиска в глубину (Depth-first search, DFS)

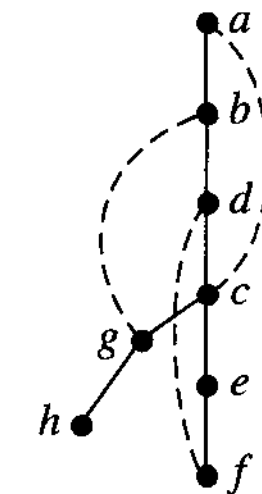
```
used_vertices = []
def dfs(graph, vertex, used_vertices)
  used_vertices << vertex
  graph.adjacent_vertices(vertex).each do |v|
    if not used_vertices.include? v
      puts "#{vertex}-#{v}"
      dfs(graph, v, used_vertices)
    end
  end
end

dfs(graph, initial_vertex, used_vertices)
puts "result:"
puts used_vertices
```



Vertices	Lists of Adjacencies			
a	b	c		
b	a	d	g	
c	a	d	e	g
d	c	b	f	
e	c	f		
f	e	d		
g	b	c	h	
h	g			

Depth First Search
beginning at a



— edge to unvisited
vertex (tree edge)
--- edge to previously
visited vertex

Алгоритм поиска в ширину (Breadth-first search, BFS)

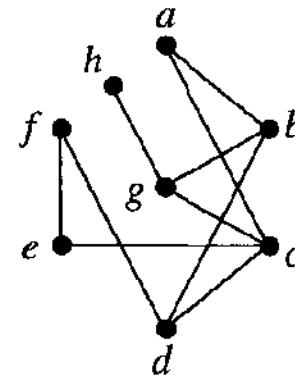
```

used_vertices = []
queue = [initial_vertex]

until queue.empty? do
  vertex = queue.shift
  used_vertices << vertex
  graph.adjacent_vertices(vertex).each do |v|
    if not used_vertices.include? v and
       not queue.include? v
      puts "#{vertex}-#{v}"
      queue << v
    end
  end
end

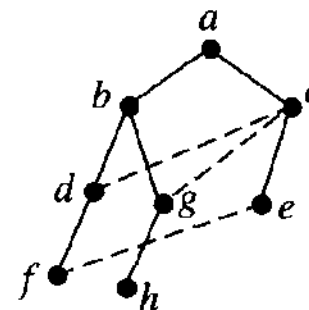
puts "result:"
puts used_vertices

```

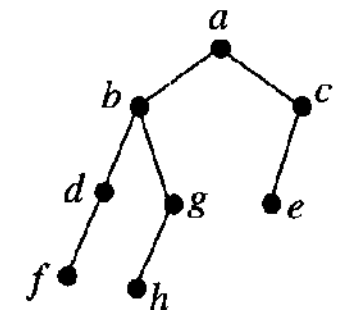


Vertices	Lists of Adjacencies			
a	b	c		
b	a	d	g	
c	a	d	e	g
d	c	b	f	
e	c	f		
f	e	d		
g	b	c	h	
h	g			

Breadth First Search
Beginning at a



Breadth First
Search Tree



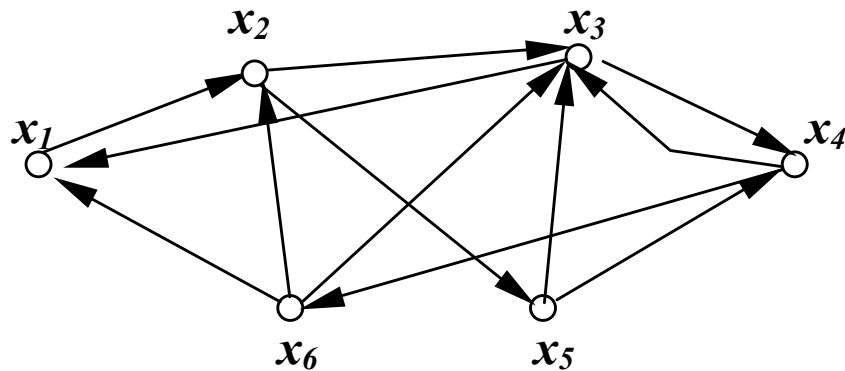
Пути в графе

- **Гамильтонов путь в графе** – это элементарный путь, проходящий через все вершины графа, т.е. путь, проходящий через все вершины в графе, причем каждая вершина встречается только один раз. Если этот путь замкнут, то говорят о Гамильтоновом контуре (Гамильтоновом цикле), а граф – Гамильтонов.
- **Эйлеров путь в графе** – простой путь в графе, проходящий через все дуги графа, т.е. путь, проходящий через все дуги графа, причем каждая дуга встречается в пути только один раз. Если этот путь замкнут, то говорят об Эйлеровом контуре, а граф – Эйлеров.

Поиск гамильтонова пути (ГП)

- Метод перебора - аналог алгоритма поиска в глубину (алгоритм Робертса и Флореса):
 1. $S=[x_i]$ - начальная вершина пути
 2. Если $|S| = \text{число вершин в графе}$, то ГП найден, **завершить работу**.
 3. Если есть смежные с последней вершиной пути *не пройденные* вершины, то поместить в S следующую смежную не пройденную вершину с минимальным номером и переход на п.2
 4. Если $|S|=1$, то ГП нет, **завершить работу**.
 5. Удалить из S последнюю вершину и переход на п.3.
- Нет строгого простого правила проверки существования ГП.

Пример поиска ГП



1	2		
2	3	5	
3	1	4	
4	3	6	
5	3	4	
6	1	2	3

1. $S=[x_1]$ К ней добавляем вершину x_2
2. $S=[x_1, x_2]$ Добавляем x_3
3. $S=[x_1, x_2, x_3]$ Добавляем x_4
4. $S=[x_1, x_2, x_3, x_4]$ Добавляем x_6
5. $S=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_6]$ Дальше добавлять из строки, соответствующей вершине x_6 ничего нельзя, т.к. все ее элементы уже входят в S . Возвращаемся на предыдущий шаг
6. $S=[x_1, x_2, x_3, x_4]$ Кроме x_6 добавить нечего. Возвращаемся
7. $S=[x_1, x_2, x_3]$ Кроме x_4 добавить нечего. Возвращаемся
8. $S=[x_1, x_2]$ Добавляем x_5
9. $S=[x_1, x_2, x_5]$ Добавляем x_3
10. $S=[x_1, x_2, x_5, x_3]$ Добавляем x_4
11. $S=[x_1, x_2, x_5, x_3, x_4]$ Добавляем x_6
12. $S=[x_1, x_2, x_5, x_3, x_4, x_6]$ Гамильтонов путь.

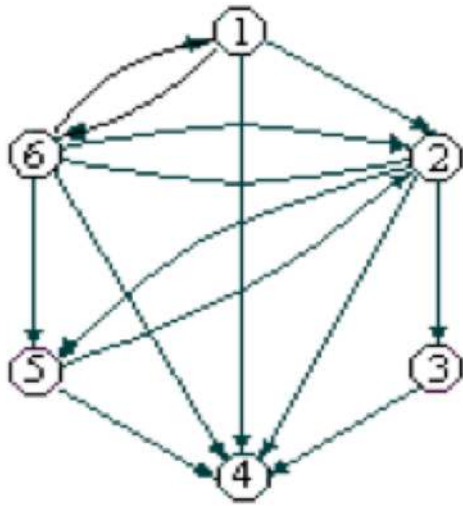
Дуга (x_6, x_1) дает Гамильтонов цикл.

Сокращение перебора при поиске ГП

Алгоритм Фаулкса

1. Построить матрицу R^1 - достижимости не более чем за один шаг. Матрица R^1 может быть получена из матрицы смежности R в результате подстановки единиц на главной диагонали.
2. Вычислять $R^N = \underbrace{R^1 \otimes R^1 \otimes \dots \otimes R^1}_N$ $r_{ij}^N = \bigvee_{k=1}^n r_{ik}^{N-1} \cdot r_{kj}$
3. Удалять начальные и конечные вершины. Вершина является начальной вершиной ГП, если во всей строке матрицы стоят единицы, а во всем столбце (за исключением их пересечения) - нули. Вершина является конечной вершиной ГП, то во всей строке матрицы стоят нули (за исключением их пересечения), а во всем столбце - единицы.
4. Прекратить вычисления когда $R^n = R^{n-1}$.

Пример применения алгоритма Фаулкса



$$R^1 = A_3$$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	1	0	1	0	1
A_2	0	1	1	1	1	1
A_3	0	0	1	1	0	0
A_4	0	0	0	1	0	0
A_5	0	1	0	1	1	0
A_6	1	1	0	1	1	1

$$(R^1)' =$$

	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6
A_1	1	1	0	0	1
A_2	0	1	1	1	1
A_3	0	0	1	0	0
A_5	0	1	0	1	0
A_6	1	1	0	1	1

Пример применения алгоритма Фаулкса (2)

$$(R^2)' = \begin{array}{c|ccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_5 & A_6 \\ \hline A_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (R^3)' = \begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & A_5 & A_6 \\ \hline A_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ A_6 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$R^b = \begin{array}{c|cccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ \hline A_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$R^c = \begin{array}{c|cccc|cc} & A_1 & A_2 & A_5 & A_6 & A_3 & A_4 \\ \hline A_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Теорема Эйлера

- для неориентированных графов: для того чтобы на графе существовал замкнутый эйлеров путь (ЭП), необходимо и достаточно, чтобы граф был связным и степени всех его вершин были четными.
- для ориентированных графов: для того чтобы на ориентированном графе существовал замкнутый ЭП, необходимо и достаточно, чтобы граф был связным и для каждой его вершины полустепень исхода равнялась полустепени захода.

Алгоритм поиска ЭП

0. Задается начальный шаг итерации $k = 0$. Задается начальная (она же и конечная в случае замкнутого ЭП) вершина ЭП V_0 . Все ребра графа считаются непомеченными. Число непомеченных ребер S равно числу ребер графа.

1. $k=k+1$. Определяются все вершины, непосредственно связанные непомеченными ребрами с вершиной V_{k-1} .

2. Определяется число S_k непомеченных ребер, инцидентных вершине V_{k-1} .

Если $S_k = 1$, то вторая вершина, инцидентная этому ребру, становится очередной вершиной V_k ЭП. Это ребро помечается. Возвращаемся на п. 1.

Если $S_k > 1$, то среди вершин, смежных V_{k-1} , выбирается вершина с наименьшим номером k , которая становится очередной вершиной V_k ЭП. Ребро, соединяющее эту вершину с вершиной V_{k-1} , помечается.

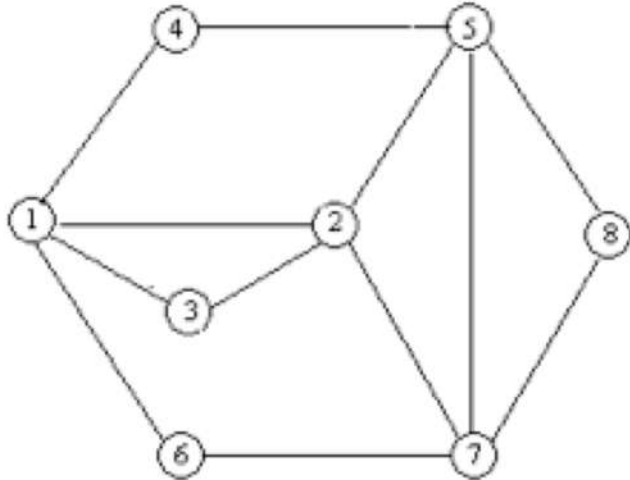
Возвращаемся на п. 1.

3. $S_k = 0$. Для вершины, принадлежащей полученному таким образом пути и имеющей непомеченные инцидентные ребра, строится цикл по непомеченным ребрам. Определение новой вершины этого цикла начинается с п. 1.

4. Построенный таким образом новый цикл объединяется с ранее построенным в вершине, с которой начиналось построение нового цикла.

5. Если в цикле есть еще вершины, имеющие непомеченные инцидентные ребра, то возвращаемся на п. 3. Если таких ребер нет, то ЭП найден.

Пример поиска ЭП



0. $k = 0$. Выберем начальную вершину с номером 3, т.е. $V_0 = 3$. Число непомеченных ребер $S = 12$.

1. $k = 1$. С вершиной $V_0 = 3$ связаны вершины 1, 2.

2. Число непомеченных ребер для 3-й вершины $S_1 = 2$.
Следующей вершиной ЭП является вершина с номером 1.
Ребро 3-1 помечается. Возвращаемся к п. 1.

1. $k = 2$. С вершиной 1 связаны вершины 2, 4, 6.

2. $S_2 = 3$. Вершина 2. Помечается ребро 1-2.
Возвращаемся к п. 1.

1. $k = 3$. С вершиной 2 связаны вершины 3, 5, 7.

2. $S_3 = 3$. Вершина 3. Помечается ребро 2-3.
Возвращаемся к п. 1.

1. $k = 4$. С вершиной 3 связаны вершины 1, 2.

2. $S_4 = 0$. Вершин таких нет. Следовательно, получен цикл 3-1-2-3, который еще не является ЭП.

Пример поиска ЭП (2)

3. Вершины 1 и 2, входящие в этот цикл, имеют непомеченные инцидентные ребра. Рассмотрим вершину 1 в качестве начальной точки следующего цикла $A_4 = 1$.

1. $k = 5$. Вершины 4, 6.

2. $S_5 = 2$. Вершина 4. Ребро 1-4.

1. $k = 6$. Вершина 5.

2. $S_6 = 1$. Вершина 5. Ребро 4-5.

1. $k = 7$. Вершины 2, 7, 8.

2. $S_7 = 3$. Вершина 2. Ребро 5-2.

1. $k = 8$. Вершина 7.

2. $S_8 = 1$. Вершина 7. Ребро 2-7.

1. $k = 9$. Вершины 5, 6, 8.

2. $S_9 = 3$. Вершина 5. Ребро 7-5.

1. $k = 10$. Вершина 8.

2. $S_{10} = 1$. Вершина 8. Ребро 5-8.

1. $k = 11$. Вершина 7.

2. $S_{11} = 1$. Вершина 7. Ребро 8-7.

1. $k = 12$. Вершина 6.

2. $S_{12} = 1$. Вершина 6. Ребро 7-6.

1. $k = 13$. Вершина 1.

2. $S_{13} = 1$. Вершина 1. Ребро 6-1.

1. $k = 14$. Вершин, связанных непомеченными ребрами, нет.

3. $S_{14} = 0$. В найденных циклах нет вершин, имеющих инцидентные непомеченные ребра.

4. Для нахождения ЭП необходимо объединить два найденных цикла 3-1-2-3 и 1-4-5-2-7-5-8-7-6-1 в вершине 1. Результатом объединения будет путь: 3-1-4-5-2-7-5-8-7-6-1-2-3.

5. Так как в этом пути нет вершин с непомеченными ребрами, то найденный путь является эйлеровым.

Определение связности графа

- Неориентированный граф называется **связным**, если для любой пары вершин $x_i, x_j \in X$ существует хотя бы один маршрут, их соединяющий. В противном случае граф несвязан. Несвязный граф может быть единственным образом разбит на группы взаимосвязанных вершин (на **связные компоненты**) таким образом, что не существует маршрута, соединяющей какие-либо из вершин различных компонент.

Определение связности графа с помощью элементов алгоритма Фаулкса

- Пусть дана матрица смежности R неориентированного графа G (матрица R симметрична относительно главной диагонали), имеющего n вершин
- На основании матрицы смежности R получим матрицу достижимости не более чем за один шаг R^1
- Найдем матрицу R^N путем булевого перемножения матриц ($R^N = R^{N-1} \otimes R^1$) до тех пор, пока не достигнем $R^N = R^{N-1}$.
- Необходимо в некоторой i -строке матрицы R^N найти элементы $r_{ij}^N = 1$, $i, j = 1, \dots, n$. Номера столбцов j , где $r_{ij} = 1$, и будут номерами вершин, входящих в связный подграф, включающий в себя i -ю вершину. Рассматривая последовательно все несовпадающие строки матрицы можно выявить все m связных подграфов исходного графа G .

Пример проверки связности

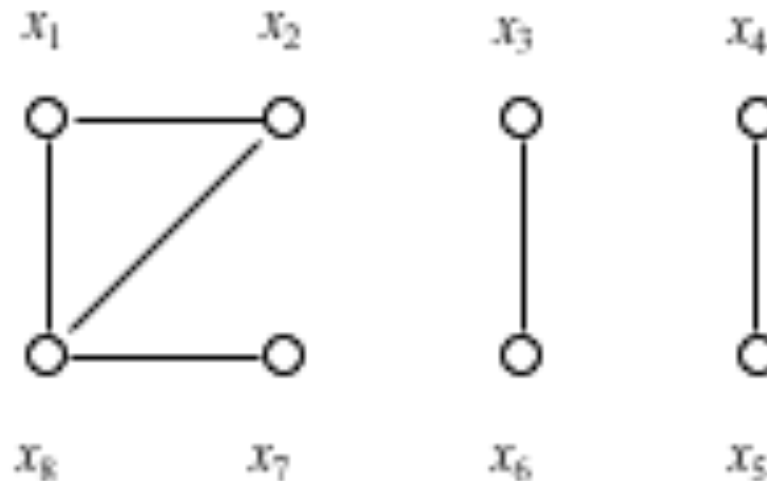
$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = R^3$$

$$G_1 = \{1, 2, 7, 8\}; \quad G_2 = \{3, 6\};$$

$$G_3 = \{4, 5\}$$



Связность ориентированного графа

- орграф **сильно связан**, если существует хотя бы один путь как из $x_i \rightarrow x_j$, так и $x_j \rightarrow x_i$, т.е. любые две вершины взаимно достижимы
- орграф **слабо связан**, если для любой пары $(x_i, x_j) \in X$ существует маршрут, их соединяющий, но не для всех пар существует путь, их соединяющий
- орграф **связан односторонне**, если для любой пары $(x_i, x_j) \in X$ существует хотя бы один путь, их соединяющий, из $x_i \rightarrow x_j$ или $x_j \rightarrow x_i$ (или оба одновременно).

Матрицы L и Q

Матрица достижимости L:

$$l_{ik} = \begin{cases} 1 - \text{если вершина } x_k \text{ достижима из вершины } x_i; \\ 0 - \text{если вершина } x_k \text{ не достижима из вершины } x_i; \end{cases}$$

$$L = R^N = \underbrace{R^1 \otimes R^1 \otimes \dots \otimes R^1}_N \quad N: R^N = R^{N-1} \quad N \leq n-1$$

Матрица контрдостижимости Q :

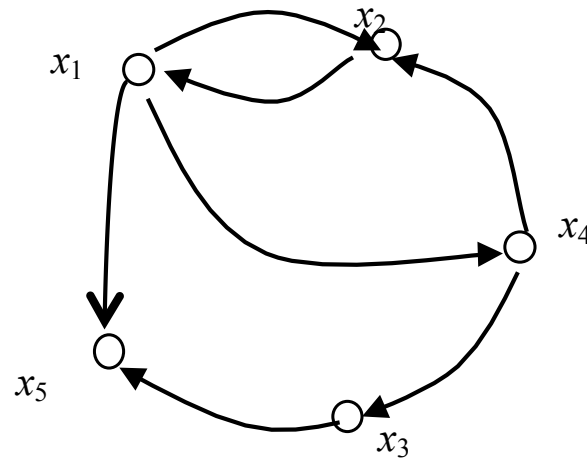
$$q_{ik} = \begin{cases} 1 - \text{если вершина } x_i \text{ достижима из вершины } x_k; \\ 0 - \text{если вершина } x_i \text{ не достижима из вершины } x_k; \end{cases}$$

$$Q = L^T$$

Сильные компоненты графа

- Под **сильной компонентой (СК)** графа G будем понимать подграф G' графа G , являющийся сильно связным графом, который не содержится в любом другом сильном подграфе графа G .
- СК содержит максимальное возможно число вершин
- Сильные компоненты произвольного графа G могут быть найдены в результате поэлементного логического перемножения матриц L и Q . Номера столбцов в i -й строке, для которых элемент матрицы равен 1, соответствуют номерам вершин, входящих в данную сильную компоненту.

Пример поиска сильных компонент

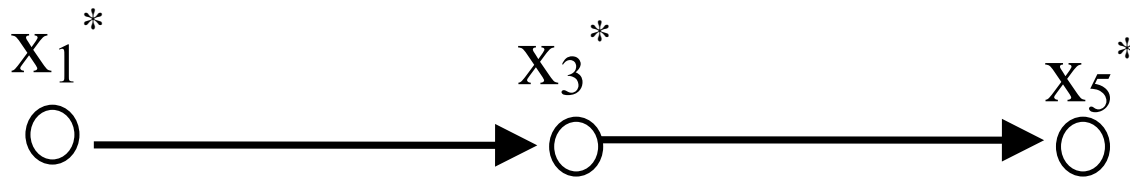


$$R^1 = \begin{pmatrix} 11011 \\ 11000 \\ 00101 \\ 00110 \\ 00001 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 11111 \\ 11111 \\ 00101 \\ 11111 \\ 00001 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 11010 \\ 11010 \\ 11110 \\ 11010 \\ 11111 \end{pmatrix}, \quad L \cap Q = \begin{pmatrix} 11010 \\ 11010 \\ 00100 \\ 11010 \\ 00001 \end{pmatrix}.$$

$$CK_{x1} = \{x_1, x_2, x_4\}, \quad CK_{x2} = \{x_3\}, \quad CK_{x3} = \{x_5\}$$

Конденсация графа

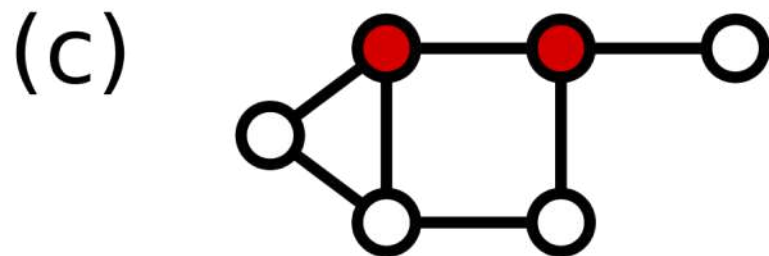
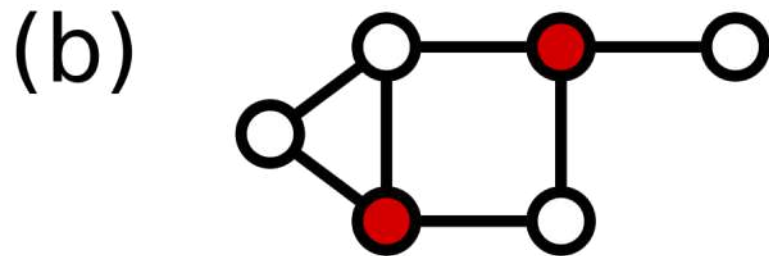
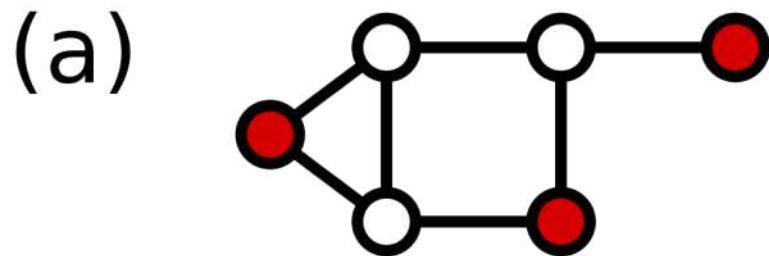
На сильных компонентах, как на вершинах, может быть построен новый граф $G^*=(X^*, F^*)$ – который называется **конденсацией** графа G . Каждая его вершина отображает множество вершин, соответствующих одной из сильных компонент исходного графа G , а дуга (x_ξ^*, x_η^*) существует в G^* тогда и только тогда, когда в графе G существует дуга (x_i, x_j) такая, что $x_i \in \text{СК}x_\xi$, а $x_j \in \text{СК}x_\eta$.



Базовое и доминирующее множества

- **Базовым множеством** (БМ) графа G называется такое множество B вершин этого графа, из которых достижима любая вершина графа и не существует его подмножества, обладающего таким же свойством достижимости.
- **Доминирующим множеством** (ДМ) вершин $S \subseteq X$ графа $G=(X,F)$ называется такое множество вершин, что для каждой вершины $x_j \notin S$ существует дуга (путь длиной 1), идущая от некоторой вершины множества S к данной вершине x_j и не существует его подмножества, обладающего таким же свойством.
- Для поиска БМ/ДМ нужно в матрице L/R^1 найти такой набор строк, чтобы в каждом столбце была хотя бы одна 1. И из этого набора строк нельзя удалить ни одной строки без нарушения данного условия.

Поиск доминирующих множеств



Дерево

Ациклический граф — граф без циклов.

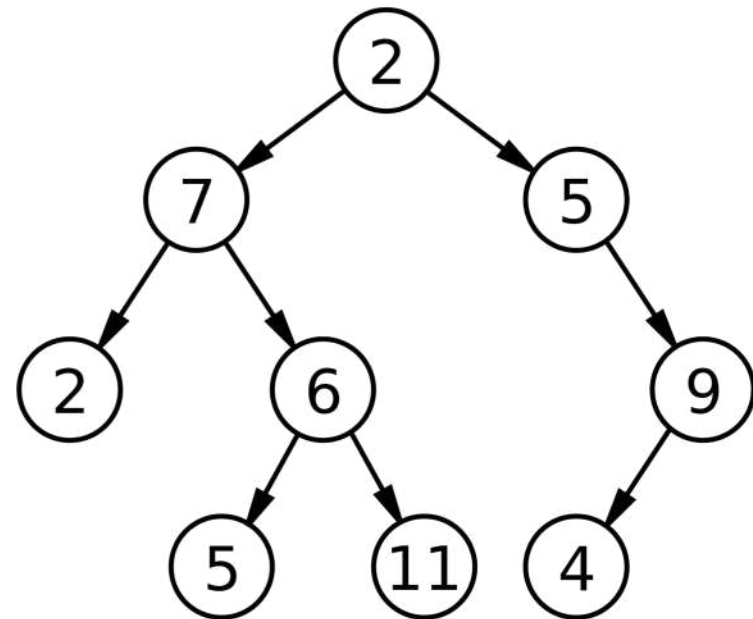
Дерево — это связный ациклический граф.

Ориентированное (направленное) дерево — ациклический, в котором только одна вершина имеет нулевую полустепень захода (корень), а все остальные вершины имеют полустепень захода 1. Вершины с нулевой полустепенью исхода называются *концевыми вершинами* или *листьями*

Двоичное дерево (бинарное дерево):

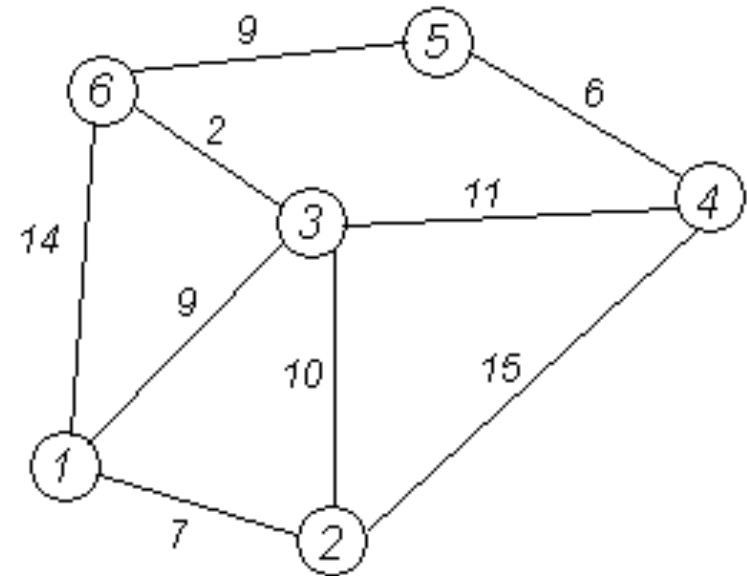
- Неориентированное дерево, в котором степени вершин не превосходят 3.
- Ориентированное дерево, в котором исходящие степени вершин (число исходящих рёбер) не превосходят 2.

Остовное дерево графа состоит из минимального подмножества рёбер графа, таких, что из одной из вершин графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим рёбрам.



Задачи на нагруженных графах

- Каждому ребру ставится в соответствие вес (длина, стоимость, время)
- Задача найти путь *минимального суммарного веса*
- Если по условию нужно обойти все вершины, то задача называется:
Задача коммивояжёра
(англ. Travelling salesman problem - TSP)



Алгоритм Дейкстры

- Алгоритм Дейкстры (англ. Dijkstra's algorithm) — алгоритм на графах, изобретённый нидерландским учёным Эдсгером Дейкстрой в 1959 году. Находит кратчайшие пути от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без рёбер отрицательного веса.

Примеры задач:

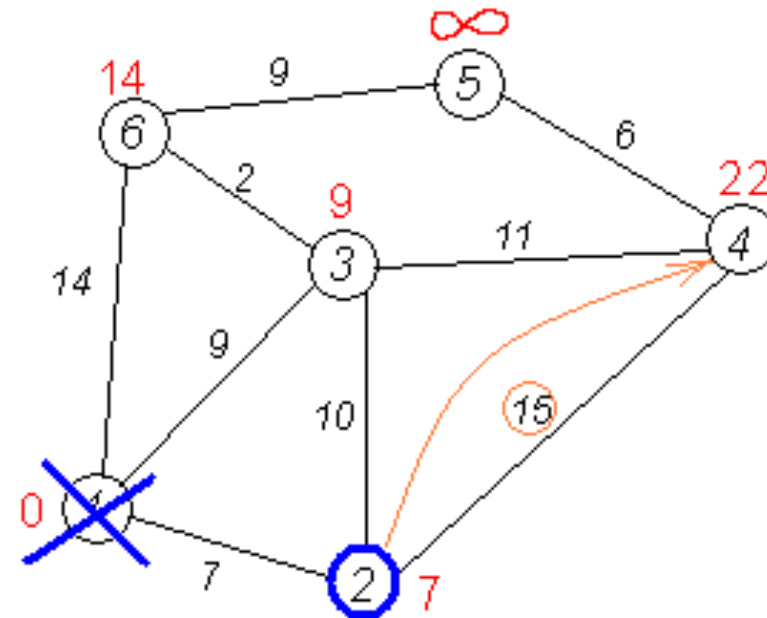
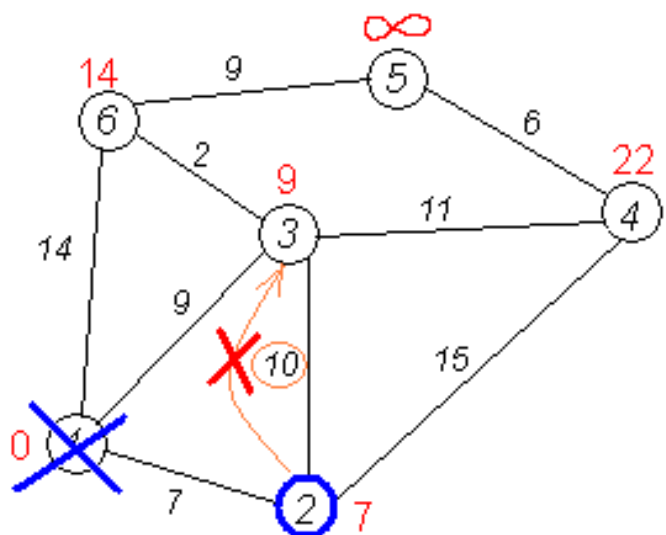
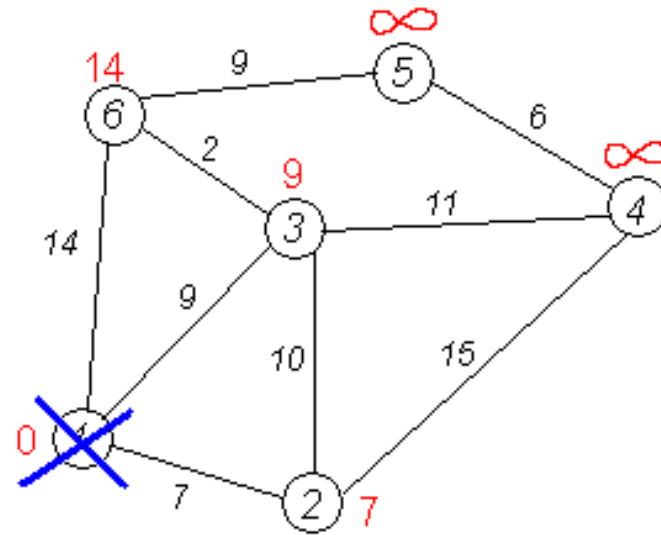
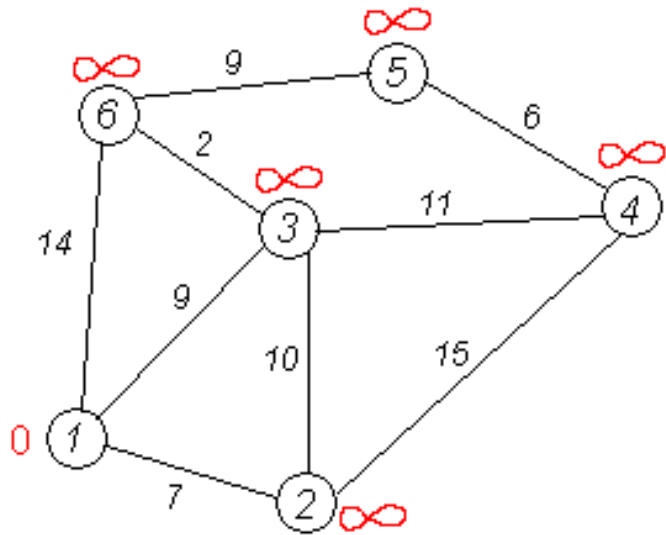
- Вариант 1. Дана сеть автомобильных дорог, соединяющих города Московской области. Некоторые дороги односторонние. Найти кратчайшие пути от города Москвы до каждого города области (если двигаться можно только по дорогам).
- Вариант 2. Имеется некоторое количество авиарейсов между городами мира, для каждого известна стоимость. Стоимость перелёта из А в В может быть не равна стоимости перелёта из В в А. Найти маршрут минимальной стоимости (возможно, с пересадками) от Копенгагена до Барнаула.

Алгоритм Дейкстры (2)

Аналог алгоритма поиска в ширину:

- Каждой вершине из V сопоставим метку — минимальное известное расстояние от этой вершины до a . Алгоритм работает пошагово — на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.
- **Инициализация.** Метка самой вершины a полагается равной 0, метки остальных вершин — бесконечности. Это отражает то, что расстояния от a до других вершин пока неизвестны. Все вершины графа помечаются как непосещённые.
- **Шаг алгоритма.** Если все вершины посещены, алгоритм завершается. В противном случае, из ещё не посещённых вершин выбирается вершина u , имеющая минимальную метку. Мы рассматриваем всевозможные маршруты, в которых u является предпоследним пунктом. Вершины, в которые ведут рёбра из u , назовём *соседями* этой вершины. Для каждого соседа вершины u , кроме отмеченных как посещённые, рассмотрим новую длину пути, равную сумме значений текущей метки u и длины ребра, соединяющего u с этим соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, заменим значение метки полученным значением длины. Рассмотрев всех соседей, пометим вершину u как посещённую и повторим **шаг алгоритма**.

Пример работы алгоритма Дейкстры



Пример работы алгоритма Дейкстры (2)

